ウィラード・ヴァン・オーマン・クワイン

集合論とその論理

大出　晁
藤村龍雄　訳

岩波書店

SET THEORY AND ITS LOGIC

by

Willard van Orman Quine

バートランド・ラッセルに

この主題におけるその着想は
長きにわたって巨大と映り
その著作はこの主題への
私の興味をばそそった

『なんと奇妙なパラドックスの振舞い』

W. S. ギルバート

日本語版序文

日本の国民と文化を敬愛してやまない私は，日本語での私の著書を見るのは，たいへん嬉しい．現在の場合，ひとしお嬉しく感ずる理由が，もうひとつある．というのは，この本のいくつかの部分の初期の草稿にもとづいて，この書物が印刷される四年前の1959年に，東京で私は一連の講義をしたからである．

その四年間に，この書物は徐々に多くの発展をしたが，世に出てからも，いっそうの発展をとげた．大江教授*と藤村氏が翻訳したものの多くは，既刊の英語版に代る1964年の改訂版タイプ原稿であった．さらに，それ以後，1966年8月，彼らが翻訳を終え，出版社に渡したあとで，私はよりいっそう広汎な変更を意味するような改善に思いいたった．この理由から出版社に刊行を延期するように求め，また，すんだものと思っていた翻訳の仕事をよろこんで再びとりあげてくれた大江に私は感謝したい．さらに，刊行スケジュールをよろこんで変更してくれた岩波書店にも負うところ多い．この書物は，そのために，決定的によりよいものとなった．私の学生たちが現存する英語版にかわってそれを読むことができればよいが，と私は思う．

もっとも最近の大きな変化は§23における公理型の採用であって，それは，もしあるクラスのメンバーがある順序数より小さい順序数に対応づけられうるならば，そのクラスが存在する，ということを一般に規定している．一般に，この本での私の方針は存在仮定を最小にしそれを後廻しにする，ということであった；だが，この大きな妥協はそれなりに報われるところのあることがわかった．その公理型は，無限クラスの仮定を延期しつづけているにもかかわらず，一方では，以前§§23—27の定理をごたつかせていた存在仮定の多くを一掃し，さらに，多くの定理を単純化するのに役だったのである．その公理型の顕著な効果のひとつは，最終の順序数はない，ということの証明である(新24.9)．

超限回帰法に関する§§25—27は，すでに，チャールズ・パースンズ(Charles Parsons)に示唆されたもうひとつの大きな変更が加えられていた；文献表参照．彼は，この主題に関する私の定理型のいくつかが，型文字のあきらかに望ましい解釈を排除してしまうであろうような存在仮定を有している，ということを指摘した．彼はこのような状況をどのように除去するかを示したが，私は彼の中心的な考え方を採用した．

* 訳者のひとり大出を指すが，これについては，「訳者あとがき」を見られたい．

パースンズは，また，超限回帰法の私の扱い方に，第2の，より些細な制限を指摘し，それを克服する手段を示した．しかし，それは最終の順序数があるならば問題となるような制限であった；そして，うえに記したように，このような偶発的事態は，いま，排除されている．それゆえ，この点では，私はパースンズに従ってはいない．

もうひとつの顕著な改訂は，バートン・ドリベン(Burton Dreben)によって示唆された：つまり，無限カーディナル数についての§30の再編成である．基底づけ公理と置換公理型に関する拡張と訂正もまた，ドリベンとケネス・ブラウン(Kenneth Brown)の促がすところであった．ブラウンとワン(Wang)による発見の結果，私は，§13およびその他の箇所で，公理に関する若干の補足を挿入した．タイプ理論の変形に関する§37は，おもにデイヴィッド・カプラン(David Kaplan)による発見に照らして改善された；このひとつの例は，ある段階における公理としての「$(\exists x)T_0x$」の消去である．

小さな改良は，この本全般を通じてなされた．そこここで，証明は短縮され，定理は強められ，理論上であると否とを問わず誤まりは訂正され，スペースを節約する補助定理が挿入され，不明な点は明確にされ，歴史上の誤まりが訂正される一方脱落は補われ，新しい出来ごとは記載された．これらに関しては，私は，バートン・ドリベン，ジョン・デントン(John Denton)，ジョン・ヴァン・ヘイエノート(John van Heijenoort)，ヘンリ・ヒッツ(Henry Hiz)，デイヴィッド・K. ルイス(David K. Lewis)，大江晁，チャールズ・パースンズ，デール・R. サムスン(Dale R. Samson)，トマス・スキャンロン(Thomas Scanlon)，レスリー・サープ(Leslie Tharp)，吉田夏彦にさまざまな点で負うている．

1963年の初版の校正と索引作製と同様，この改訂版での私の仕事を援助された国立科学基金に感謝したい．

1966年11月

W. V. Q.

序　　文

序文は，私の著書の場合，序論ではない．ある書物がどの範囲をどのように論じているかを，すでにその主題に明るい読者に，どこかで簡潔に語っておく必要がある．書物それ自体は，概念を説明し主張を正当化しながら，この情報をながながと与える．序文は，専門的な用語と概念を意のままに用いることを前提して，この情報を手短かに提供する．

序論で説明されるように，本書は論理学の若干の知識以外，まえもって集合論についてはなんの知識も仮定していない．『論理』という題のI章は，この必須な知識を前提としている．そこで構成されるのは，主として，私がよそでクラスと関係の仮理論(virtual theory of classes and relations)とよんだものである：すなわち，純粋に論理学から造られた集合論の部分的な模造品である．これは後の章に二様に役だつ．ひとつには，仮理論は，後の実理論(real theory)との有効な対照を与える．この対照は，真にクラスを仮定することが何を結果するかを明らかにするのに役だつ；つまり，模造品が与えることのないどんな力を実クラス(real class)が与えるか，ということである．もうひとつには，仮理論はときおり，実理論と合併して，厳密には実理論だけの場合ほど強力なものではないが，その取り扱いがよりスムーズな結合を生み出すのである．

いま述べたこの方針は，専門家の検討に委ねたいことが幾つかあるが，そのうちのひとつである．しかし，同時に，本書の目的は，抽象的集合論の主な論点への一般的な入門と，また最後の部分で，集合論のもっともよく知られている公理化について幾分なりとも組織的な見解を提供することである．逆説的にいえば，アプローチの新しさそのものが，ある範囲では，個人的な好みを中和するための趣向なのである．

文献に見られる集合論の公理的諸体系は，大きな点で相互に両立せず，どれもがあきらかに標準的なものとして取り出されるに値するものではないので，選択可能なもののパノラマを教えるのが賢明のように思われる．このことは，あきらかに最良であるところの集合論にいつかは達するかもしれぬような研究を促進することができる．しかし，このリベラルな方策を遂行しようとする著者には，彼なりの問題がある．彼は，初めからパノラマ的な全景をうまく提供するわけにはいかない，というのは，初学の読者は，諸体系が組織化しようとしている素材も，またなんらかの点で他の体系よりもある体系に好都合でありうるかもしれぬ考察も，正しく評価することがないであろうから．それよりも，主題の予

備的なインフォーマルな概説で読者を方向づけることから始めるのがよいであろう．しかし，この場合にもまた面倒がある．そのような概説が些末な点以上に進まねばならぬときには，容易に二律背反に変じうるような，したがって，インフォーマルなアプローチをまったく捨てて公理的なものをとるか，それとも，インフォーマルな方向づけが終るまで読者の注意を危険な問いからずるくそらすかの二つにひとつの方法でそれらの二律背反を除かなければ自らの信用を落すかもしれないような，容易ならぬ，詭弁に類する推論に訴えねばならない．後のやり方は，学問の教師にとっては好ましくない種類の技巧を必要とする．そして，どのみち，それは誰かから二律背反のことを聞かされている読者には無力である．いったんそれを聞かされると，読者はもはや抽象的集合論の複雑でインフォーマルな議論の訓練を甘受するわけにはいかない；なぜなら，彼らにはもはやどの直観的議論が価値をもつかが分らないからである．集合論の専門家が公理的な方法に頼るのは，やはり，いわれのないことではない．直観はここでは破綻している，そして，書物の半ばまで，読者にこの事実を無邪気に知らせないでおくことは，たとえそれが可能であるにしても，気の毒なことである．

この本では，私はその問題を処理するのに，初めから形式的な方向を開いておくが，しかし，私の公理を弱い穏当なものに，かくてほぼ中立的なものにしておく．より強い公理に依存する論点はできるだけ後回しにして，それに直面しなければならないときでも，必要な仮定を，それを必要とする定理の中にむしろ公然の仮説(hypothesis)として編みこむことによって，より強い公理をさらに後回しにする．このようにして，中立性をひどく犯すことなく，しかもなお，故意の非形式性や，無邪気さの不自然な延引に頼らずに，私は読者に相当詳しく集合論の主な部分を知らせることができる．このような十章を終えると，私は，終りの四章で，読者がすでになじんだことがらの，相互に両立しない多数の公理化を提出してそれらを比較しうる立場にある．

より明確にいえば，このように本書の主要部分を支配している弱い公理とは，有限クラス以外のいかなるものの存在も含まないようなものである．さらに，それらはいかなる無限クラスをも仮定的に要請することさえしない．この意味を理解するために，私の公理と対照して，空クラス Λ と，すべての x および y に対する $x \cup \{y\}$ の存在とを与える一対の公理を考察しよう．これらの公理は，私の公理とおなじように，有限クラスのみの存在を含む．しかし，私の公理とは異なり，これらの公理はまた，もし無限クラス x が存在するならば，いかなる y に対してもそれ以上の無限クラス $x \cup \{y\}$ が存在する，ことを規定し

ている．

私の公理は，いかなるものが存在するにせよ，それらのすべての有限クラスの存在をたしかに与える．その結果，私の公理は，文献に見られる諸体系に対してまったく中立的というわけではない．私の公理は，フォン・ノイマン(von Neumann)のような体系とは相容れない，これらの体系においては，あるクラス——私はそれらを『究極』(ultimate)クラスとよぶ——はまったくクラスのメンバー(member)となりえないものと考えられている．私自身の『数理論理学』(*Mathematical Logic*)もそういう体系のひとつであったが，本書では，私は究極クラスに対して有限クラスを擁護する．

私の有限クラスの公理は，自然数の算術に対して十分なものであることが分る．ふつう，自然数の定義は無限クラスを含む．自然数とは，(なんらかの仕方で定義された)0を含み，かつ(なんらかの仕方で定義された)後続者演算(successor operation)に関して閉じているような，すべてのクラスの共通なメンバーである；そして，そのようなクラスはどれも無限である．この定義に基づく数学的帰納法の法則は，無限クラスを仮定することによってのみ証明しうるのである．しかし，私は，自然数の定義を次のように逆にして，有限クラスでうまくやることができる：つまり，もし0が，xを含みかつ先行者(predecessor)に関して閉じているすべてのクラスの共通なメンバーであるならば，xは自然数である．

自然数の定義は，古典的には，フレーゲ(Frege)の祖先関係(ancestral)(デデキント(Dedekind)の連鎖(chain))の定義の特殊なケースである；すなわち，自然数とは0に対して後続者関係の祖先関係に立つものである．数学的帰納法は，祖先関係の帰納法の特殊ケースである．さて，上のような反転によって，自然数の特殊ケースにおいて無限クラスを必要としないようにすることはたいへん結構であるが，しかし，一般の場合にはどうであろうか．この問いに対する私の答えは，一般を特殊から導き出すということである：すなわち数論を手助けにして，変項「n」に対して関係rのn番目の反復(iterate)を定義し，それから，rの祖先関係を，事実上，その反復の合併(union)として定義するのである．この手段によって，祖先関係の演繹の一般法則が，ふつうその特殊な場合とみなされるもの，すなわち，数学的帰納法から導かれるのであり，しかも，無限クラスは必要とされないのである．それに伴なって反復という概念は，算術の和，積，巾の定義とその取り扱いを簡単にする．これらの展開は，おもにデデキントのアイディアの復活である．

これらおよびそれにつづく展開のあいだ中ずっと，公理によっては説明されない豊富な手段がひとつのイリュージョンを支えている．そのトリックとは，仮理論を実理論に融合

することである．クラス抽象(class abstraction)の「$\{x: Fx\}$」という記法が，たとえクラスが存在しないにしても，いろいろと利用できるように文脈的定義によって導入される；それを変項に代入することは，まさしく存在を必要とするが，この制限さえ，存在を必要としない型文字(schematic letter)を使えばいくぶん緩和される．われわれは，集合としての存在にせよ，あるいは究極クラスとしての存在にせよ，その存在なしにクラスのもつ利点を十分に享受しうるのを見出すのである．

自然数の次は，有理数と他の実数である．実数は，例の通り，本質的にはデデキントの切断(cut)ととられるが，展開の細部は次のように調整される，すなわち，有理数は，有理実数と同型(isomorphic)なのではなく，それと同一になるのであり，また実数は，自然数のクラスとなるのであって，自然数の関係となるのでも，この関係のクラスとなるのでもない．実数の古典的な法則，とくに，最小上界の法則は，いうまでもなく，無限クラスの存在という仮定に依存している．

つぎに順序数であるが，私はこれをフォン・ノイマンの意味にとる．自然数に関する私の取り扱いは，以前はこのやり方と違っているが，それは私が自然数をむしろツェルメロ(Zermelo)流に解釈しているからである．私の理由というのは，こうして暫らくのあいだ比較的簡単な存在公理でうまくやり通すことができそうだ，ということである．順序数の一般理論では，重大な存在仮定に直面せざるをえないが，自然数論の段階では仮定を節約しつづけることができる；このようにして，私は自然数と順序数とにそれぞれ別の道を進ませる．

学生は自然数に関するツェルメロおよびフォン・ノイマン双方の説に親しむのもよいのだ，という考えに私は慰めを感ずる．それでもやはり，初めからフォン・ノイマンの説に組みしながらも，ツェルメロの説のもっているすべての利点を獲得できることを見出せたならば，私は喜んだであろう；私は，このもうひとつの方法を吟味してくれた私の学生ケネス・ブラウンの助力に感謝している．彼のすぐれた結果に頼って，一貫してフォン・ノイマンの数〔概念〕を用い続けることは，私が行なった選択とほぼ同じくらい有効でもあったであろう．

超限回帰法(*transfinite recursion*)は，フォン・ノイマンとベルナイス(Bernays)に対してと同様に私に対しても，系列の中のそれぞれのものをその系列のそれに先立つ切片(segment)の関数として特定化することによって超限系列を特定化する，ということにある．この問題はⅧ章で形式化され，順序数の算術的演算を定義する際に用いられる．そ

れはまた，任意の整列の**枚挙**(*enumeration*)を定義するときにも用いられる．枚挙の存在から，こんどは，整列の比較可能性が演繹される．これらの展開は，定理の中へ仮説として書きこまれる存在仮定に依存している．おなじことがこれに続く二章の展開にもあてはまる，これらの章では，もっぱら，シュレーダー-ベルンシュタインの定理，無限カーディナル(infinite cardinals)および選択公理の主要な等値式が扱われる．

結びの四章は公理的集合論の諸体系の記述と比較：すなわち，ラッセル(Russell)のタイプ理論，ツェルメロ，フォン・ノイマンの体系，私の二つの体系，それに素描ではあるが若干の最近の発展，とにあてられている．それらのあいだの論理的関連が跡づけられる；たとえば，タイプ理論は，それを一般的変項に翻訳し，タイプを累積的(cumulative)なものとみなすことによって，本質的にはツェルメロの体系に変換される．諸体系は，一般に，仮クラスの理論の名ごりを利用し続けるので，見慣れない形をしている．

本書の発端は，結びの四章にある．私が，1953—54年にオックスフォードでジョージ・イーストマン客員教授をしていた時の短かい講義のひとつは，公理的集合論の比較であった；私はこの問題をハーヴァードでくりかえし取り扱ってはいたが，小冊子を心に描くようになったのは，オックスフォードでの定式化のためであった．その後，オックスフォード以後の五年間，計画は中止したままであり，その間私は他の問題についての本を一冊書きあげた．1959年に再びこの問題に立ちかえり，その年の夏，東京で題材の要約を二・三講義した．その本は，集合論の比較に併せて主題の方向づけのための二・三の最小の予備的な章を有する小冊子なので，十分，一年以内に完成する見込みであった．しかし，これを書いているうちに，私は予備的な章が本の七分の五にも及んでしまうような幾つかの着想をえ，その結果，この本はさらに二年を要した．

10月以来，この原稿は，ハオ・ワン，バートン・S.ドリベンおよびジョン・ヴァン・ヘイエノートの諸教授に論評して頂くという，計り知れない恩恵に浴した．この方がたの賢明な指示によって，私は，あるところでは範囲を拡げ，他のところでは，私の分析を深め，いくつかの説明の不明瞭を取りのぞき，いろいろな歴史的な註釈を訂正増補することができたし，とくにワン氏のおかげで，いくつかの論文のより妥当な解釈を与えることができた．そして，これら三人の読者全部が，誤記を見分けるという漸近的な作業を助けて下さった．

またそれ以前に，有益な批評をドリベンおよびジョン・R.マイヒル(Myhill)両教授に負っている，また種々の細かい点は最近の学生達に負うが，それらは脚註で明記するであ

ろう．タイプ代の支払いその他の援助に対し，ハーヴァード財団と国立科学基金(National Science Foundation) (Grant GP-228)に感謝したい．

1963年1月 ボストンにて

W. V. Q.

凡　　例

1. 本書は，Willard van Orman Quine, *Set Theory and Its Logic*, The Belknap Press of Harvard University Press, 1963 の訳であるが，「日本語版序文」および「訳者あとがき」に記してあるように，未刊の改訂版原稿からの訳である．したがって，既刊の英語現行版とは大幅に異なる部分がある．詳しくは，「訳者あとがき」を参照されたい．
2. 原文中の引用符 '…', "…" はすべて「…」,『…』におきかえ，句読点はできるだけ保存した．すなわち，ピリオド，コロン，セミコロンは原文のままである．
3. (　) は原文通り，もしくは訳語に対応する原名，原語を挙げる際に用い，〔…〕の部分は訳者が補なった部分を示す．
4. 原文中のイタリックは，重要度と用法にしたがって，ゴチックと傍点とに分けた．おおむね，重要な語—術語にはゴチック，ラテン語・ドイツ語には傍点を用いた．
5. 人名は，本文中に現われる場合にはすべてカナ書きとし，最初のときにのみ原名を(　)内に記した．註に現われる場合にはすべて原名のままである．
6. 書名・論文名も本文中はカナ書きか日本語訳を記し，原名は(　)内にあげた．註ではすべて原名のままである．ただし，日本語訳のあるものは，訳書名を記した．
7. 原註は原書通り 1, 2, … で，訳註は *, **, … で示した．
8. 巻末の文献は原書のままであるが，日本語訳のあるものはこれを付記した．
9. 索引は主として原書にしたがって作製した．
10. 翻訳は，若干の部分を除き，すべて訳者両名の共訳である．
11. なお，本文中 14.5 が欠如しているが，これは改訂によって 9.16 に移されたためで，脱落ではないことをお断りしておきたい．

目　　次

序　　論

集合論はクラスの数学である．集合(set)はクラスである．クラスの概念は，思考にとってきわめて基本的なものなので，それをより基本的な言葉で定義することは望みうべくもない．クラスはなんらかの種類の対象のなんらかの集積，集まり，結合であるといえる；もしこういう言い方が役に立つならば，それはそれでよい．しかし，これすらも，次のことをはっきり心に留めておかなければ，妨げにこそなれ助けにはならないであろう．すなわち，ここにいう集積する，集める，または結合する，というのは，対象を実際に移動させることを意味するのではないし，さらに，たとえば7足の靴の集積，集まり，または結合は，14箇の靴の集積，集まり，または結合と同一視さるべきではなく，あるいはまた，28箇の靴底と上皮のそれとも同一視さるべきではない．要するに，「集積」，「集まり」，または「結合」を厳密に「クラス」の意味にとるかぎり，クラスは，対象の集積，集まり，または結合と考えてよい．

クラスという概念の機能を，われわれはもっとはっきり表現できる．ある事物についての文を想像しよう．その事物が言及されている場所を空白にするか，またはそこに変項を入れよう．そうすると，もはやその特定の事物に関する文ではなく，いわゆる開放文(open sentence)がえられる，この開放文というのは，いろいろな事物のおのおのについて真(true of)であり，また，他の事物については偽でありうる．さて，この開放文がそれについて真であるいろいろな事物に加えて，これらの事物のおのおのをメンバーとしてもち，他のものをメンバーとしてもたない**クラス**(*class*)というもうひとつのものもまた存在すると考えられる．これがクラスの概念である．それはその開放文によって**決定された**(*determined*)クラスである．

ほとんどおなじ性格づけが，属性の概念を特徴づけるのに役立つであろう；というのは，与えられた開放文がそれについて真であるいろいろな事物に加えて，これらのおのおのの**属性**(*attribute*)であり，他のものの属性ではないもうひとつのものが存在すると考えられ，これが属性の概念だからである．それは，マガフイ(McGuffey*)を弁護していえば，開放文が帰属させる(at*trib*utes)特徴(*at*tribute)である．しかし，クラスと属性の相違，理解できる唯一の相違が生ずるのは，クラスの概念の上述の特徴づけに次の必要な補足がつ

---

* William Holmes McGuffey, 1800—73. 米国の著名な教育者で，児童向き図書の著者．

け加えられるときである：クラスは，そのメンバーがおなじであるならば，おなじものである．この**外延性の法則**(*law of extensionality*)は，属性にまで及ぶとは思われない．もし，属性を，それがおなじ事物の属性であるときはつねにおなじであると見る人がいるなら，その人は，むしろクラスについて語っているものと見なさるべきであろう．私が属性の概念について歎く理由の一部は，二つの開放文によって帰属せしめられる属性が，その下で同一視される事情のあいまいなことである[1]．

私のクラス概念の特徴づけは決定的なものではない．私は，クラス概念の機能を述べてきたのであって，クラスを定義していたのではない．この叙述は，クラスが，その存在のために，クラスを決定する開放文の存在を要求していない，という点で不完全である．もちろん，いやしくもそのクラスをとくにそれと定めることができれば，それを決定する開放文を書くことができる；つまり，「ϵ」が「のメンバーである」を意味し，αがそのクラスであるときには，「$x \epsilon \alpha$」という開放文がそれを決定する．しかし，クラスの概念には，おのおののクラスが特定化されうるという仮定のないことが，落し穴なのである．もしカントール(Cantor)に発する理論の古典的な主要部分を受けいれるならば，実際，これとは反対の暗黙の仮定がある．なぜなら，そこでは正の整数のすべてのクラスに対して，相異なる正の整数を割りあてる組織的な方法がありえないにもかかわらず，与えられたいかなる言語のすべての開放文，あるいは他の表現，に対しても相異なる正の整数を割りあてる組織的な方法の存在することが証明されているからである．(§30を見よ.)

開放文によって決定されるものとしてのクラス，という私の特徴づけが示すものは，クラス概念の直接的な効用と動機づけにほかならず，したがって，その関連領域のすべてではない．事実，状況はもっと悪い：クラスが開放文の範囲を超えるだけでなく，またその逆でもある．ある開放文はあるものについて真であり，他のものについては偽でありながら，しかも，それにもかかわらず，いかなるクラスをも決定しえないのである．そこで，「$x \notin x$」という開放文をとってみよう．これは，xが自分自身のメンバーであるようなクラスでないとき，またそのときにかぎって，対象xについて真である．もし，この開放文がいやしくもひとつのクラスyを決定するならば，すべてのxに対して，$x \notin x$であるとき，かつそのときにかぎって，$x \epsilon y$となるはずである；そうすると，とくに，$y \notin y$なるときかつそのときにかぎって，$y \epsilon y$となるが，これは矛盾である．これがラッセルの逆

1 私が指示的不透明さ(referential opacity)とよぶものには，属性の概念を歎くもうひとつの理由がある．二つの不満については，*Word and Object*, 209ページ以下を見よ．

理である[2]. したがって，すべてのクラスが開放文によって決定されるとはかぎらないことを悟った直後に，いまやすべての開放文がクラスを決定するとはかぎらないことを認めざるをえない.（ちなみに，これらの災難は属性にもおなじようにふりかかるであろう.）それで，集合論の主な関心事は，どんな開放文がクラスを決定するものと見なされうるか，を決めることである；あるいは，危険を冒して実念論的な言いまわしを用いるならば，どんなクラスが存在するか，を決めることである. これは，本書を通じて，われわれがけっしてそれから遠く離れることのない問いである.

「集合」という語は，この序論の2番目の文で別れを告げて以来初めて，二つほど前の文にまた現われた. いまもう少しこの語について考えてみるのもよかろう. ともかく，この語は〔この本の〕表紙にある.

もともと,「集合」は単に「クラス」と同義であって，数学の文脈では前者のほうが「クラス」より多く用いられる. しかし，この余分の術語は，技術上の区別を立てるために用いられることも多い. 後に明らかになるように，フォン・ノイマンと，そして，たぶんカントールとともに，すべてのクラスがクラスのメンバーになるとはかぎらないと考えるのには利点(と不利な点)がある. この考えをとるいくつかの理論では，この余分の語彙が次の区別を立てるのに便利となった；メンバーとなりうるクラスは集合とよばれる. その他のクラスは,「本来のボストン」や「真部分」とのアナロジーで，不完全にも,「真のクラス」(proper class)とよばれてきた；それらが，こんどは，それ以上のクラスのメンバーとならないことを暗示して，私はこれらのクラスを**究極**クラス(*ultimate* classes)とよびたい.

われわれは,「集合」のこの専門的な意味を知っても，なお「集合」と「クラス」という語をほとんど相互に交換可能なものとして使用することができる. なぜなら，その区別が生ずるのは究極クラスを認める体系においてだけであり，しかも，そのような体系においてさえ，われわれの関係するクラスは，われわれがかなり先へ進むまでは，究極クラスというよりむしろ集合であることが多いからである. 学問分野全体に対する名称としては，たとえ究極クラスが認められるとしても,「集合論」が「クラスの理論」と同様に擁護されうることに変りはない. なぜなら，集合を真に一般的な形でどのように扱っても，もしも究極クラスが存在するなら，どのみち集合をそれらに関係づけて扱わねばならないし，

2　Russell はそれを1901年に発見した. 公表したのは1903年であるが，その間，彼はこれを Frege との手紙で論じていた. これらの書簡は，van Heijenoort〔の書物〕に載るはずである.

かくて，その取り扱いは全領域に及ぶからである．私自身の傾向としては，この主題を集合論とよぶ以外に，「クラス」でも「集合」でも間にあう場合は，「クラス」という語を好む．これがこの主題に対するふつうの言葉づかいであるし，私は，なにか別のことがらを取りあつかっていると思われたくはない．

I 章では，集合論が，部分的には，純粋に記法上の便法からどのようにして模擬的に扱えるか，その結果，集合(あるいはクラス)について語っているような外見と，それらについて語ることの効用とのいずれもが，実際にはそのようなものについて語ることなしに，どのようにしてある程度まで失われずにすむかを，われわれは見るであろう．このテクニックを私は『クラスの仮理論』とよぶ．後の章で，これを越えて実在するものへ向うときも，この模擬テクニックを補助的な手段として残しておく；それは，われわれが現実に仮定しているよりも強い存在仮定という便法の幾つかを，見かけ上では提供し続けるであろうからである．しかし，クラスと集合の相違をこの点に求めてはならない，というのは，模擬的取り扱いは集合を模倣するためになにか別の種類の事物を用いるということではない；それは，実際に，集合(あるいはクラス)のどちらについても，またその代りのいかなるものについても語ることなしに，あたかも集合(またはクラス)について語っているように見せかけることなのであるから．

私は集合論をクラスの数学的理論と定義し，クラスの概念を叙述しにかかった．だが，それによって私は，集合論が示唆しているのは何か，ということについてはなにも暗示しなかった．これにはむしろ，ツェルメロの 1908 年の論文の巻頭文を引用するのが一番よい：『集合論は数学の一分野であり，その任務は，数，順序，関数という基本的諸概念を，それら本来の簡潔さにおいて数学的に探求し，それによってすべての算術および解析の論理的基礎を展開することである．[3]』

ラッセルの逆理および他の二律背反のために，集合論の多くの部分は，数学の他の多くの部分より自己を意識して研究されなければならない．どのようなクラスが存在するかという問いに対する自然な態度は，どんな開放文もクラスを決定する，というものである．これは信用を失っているので，われわれはクラスの存在に関するわれわれの公理に慎重でなければならないし，それからのわれわれの推論についてあけすけでなければならない；つまり，ここでは直観は一般に信用さるべきではない．加えて，このための既知の公理系は，そのどれもが決定的でないようないろいろの興味ある選択さるべき方法を提供してい

3 英訳は Bauer-Mengelberg による，van Heijenoort の *Source Book* から．

るので，われわれの直観をそれにあうように訓練しなおすほどまでにただひとつの体系に没頭するのは，今のところは，軽率であろう．その結果，数学のこの部分では，論理的機構が多くの部分におけるよりはるかに目だつのである．

しかし，この点で，集合論の文献ははっきり二つに分れる．おもに解析の基礎に関する部分は，数学の他の部分とほとんどおなじ程度に非形式的であってかまわない．ここでは関係する集合は，主として，実数の集合，あるいは点の集合，さらには，これらの集合の集合，等々，である．「$x \in x$」のような問いは起らないから，ここでは二律背反の恐れはない．

われわれがそれほどとくにあけすけでなければならないのは，むしろフレンケル(Fraenkel)が，点集合論(point-set theory)に対立するものとして抽象的集合論(abstract set theory)とよんだものにおいてである．この分野の著作は，次のような論題を順に取りあげるのがその典型である．まず，クラスの存在に関する一般的な仮定とそれらに関する他の一般的な法則．つぎに，これを基礎として関係の理論，とりわけ関数の理論を導出する．それから，整数が定義され，ついで有理数，実数が定義され，それらを支配する算術の法則が導かれる．最後に，無限数(infinite numbers)：すなわち，無限クラスの相対的なサイズと無限の順序づけ(infinite ordering)の相対的な長さの理論に進む．これら後のほうの事柄が，集合論をもっともよく特徴づける仕事である．それらはカントールの発見あるいは創造であり，かくして，実質的には集合論そのものと同時代のものである．

本書は，抽象的集合論についての著作であり，大体，上述のアウトラインと一致する．したがって，これは，その論理に対してむしろあけすけでなければならない類の集合論的文献の分野に入る．そして，この要求は，本書では，二つの特別な事情によっていくぶん強められる．ひとつは，最後の四章において，選ぶべき幾つかの体系を，普通なされている以上にくわしく比較し結合する，ということである．もうひとつは，『仮理論』をたえず利用している，ということである．

このように近代論理学の概念および記法に強く依存する著述においては，初めの章を論理学の略述にさいて，つとめて自給自足をはかるのがこれまでの通例であった．しかし，近代論理学の知識は，今日では広く普及しているので，こういった面白くない実におざなりの予備的な章は，本書がしようとしているのと同様な入門的な集合論の説明においてさえも，結局不必要と思われる．たしかに，今日でも，集合論を学ぶ人のうちにも論理学に不案内の人が多い．しかし，論理学に依存することの多い著述によって集合論にとりかか

る読者は，いまでは，どこかよそで論理学を学んでいることであろう．もし学んでいないとしても，不足を補なう便利なテキストがたくさんでている[4]．他方，論理学を別にした数学に関しては，大学の新入生が知っていそうもないことは，なにひとつ，前提するつもりはない．

たいへん妙であるが，I章は『論理』と名づけてある．しかし，そこでは論理的な基礎知識を仮定している，そして，とりわけ集合論の基礎づけとの関連で，それをあてにしている．とくに，そのなさねばならぬ主な仕事は，クラスの仮理論というもの(the virtual theory of classes)と関係のひとつの仮理論(a virtual theory of relations)である．

すでに集合論に明るい読者は，序文にかえれば，すみやかに本書の目的についてのより詳しい説明がえられる．一方，私は，この序論をほとんどすべてのありそうな職業の読者に理解できるものにしてきたつもりである．本書を苦労して読み進むのに必要な程度の論理的理論の知識しかもちあわせていない読者でさえ，私がこれまでクラスについて語ってきたことの多くは，すでに承知していたことであろう；しかし，私は本書を読む準備のない人びとのために，レベルをそのような読者以下にさげて書いた．なぜなら，自分達が悩まされていないことがどのようなものであるかを彼らが知ってもよいからである．彼らのうちには，論理学を少し読んで，また戻ってこようと決心する人もあるかもしれない．

4 私の *Methods of Logic*(『論理学の方法』)で扱われている事柄で十分すぎる．私の要求は一般的なものなので，このレベルの他のいろいろなテキストでも同様に間にあう．

第1部　要　　素

I. 論　理

1. 量化と同一性

われわれは，次のような初等論理学の通常の記法上の装置を必要とする：「(x)」，「$(\exists x)$」，「(y)」，「$(\exists y)$」等の量化子(quantifier)，それらと組になっている「x」，「y」等の変項，および「$\sim$」，「.」，「$\vee$」，「$\supset$」と「$\equiv$」の真理関数記号(truth-function signs)．この初等論理的な語彙は，なんらかの特定の種類の対象に関する特定の理論内で，原子文(atomic sentence)から複合文(complex sentence)をつくるための一般的な装置である．当の特定の理論は，それがどのようなものであるにせよ，原子文を形成するのに使うためその特殊な述語を用意しており，原子文のおのおのは，そのような述語と述語に対して主語の役割をするひとつ以上の変項とから成りたっている．

注意してほしいのは，私が述語についてこのような語り方をする場合，私はある種の表現：すなわち，ひとつ以上の変項あるいは他の単称名辞(singular terms)で満たされると文を産みだすような任意の動詞的な表現*について語っているにすぎないということである．述語を性質あるいは属性というよりむしろ，このように，単なる記法と解する際に私はなにも唯名論的な哲学を支持しているのではなく，ただ用語を整頓しているにすぎない．性質あるいは属性は，それらが議論されるときには，属性とよばれるであろう．

型述語文字(schematic predicate letter)「F」,「G」, ... は，要素文(component clause)を特定化することなしに複合文の外的形式について語りたいときに，説明上の補助として，変項に付着して「Fxy」，「Gx」，「Gy」等のまがい文(dummy clause)をつくる．所期の実際の合成文(compound clause)は，どのようなものでも，まがい文「Fxy」,「Gx」等のかわりに，考察中の特定の理論の特殊な語彙の助けを借りてつくられた，ある本ものの要素文を含んでいる——たとえば，もしその理論が算術であれば，「$x<y$」,「$x<5$」,「$y<5$」のような要素文がそれである．明確な主題を導入しないでまがい文に固執するあいだは，文ではなく，文型(sentence *schemata*)を扱っているのである．初等論理学で使用される

---

* 動詞的な表現とは，たとえば，「…は走る」とか「…は —— に—を与える」とか，あるいは「…は — より大きい」の如きものである．これらの表現の線の部分に「x」，「y」，「z」等の変項，あるいは「太郎」，「次郎」，「この本」等の単称名辞を入れると，(原著者が言っている意味での)文がえられる．たとえば，「x は走る」，「x は y に z を与える」，「x は y より大きい」，「太郎は走る」，「太郎は次郎にこの本を与える」，「太郎は次郎より大きい」となる．

量化〔言明〕型(*quantificational* schemata)とよばれる文型には，原子的な文型「p」，「q」，「Fx」，「Gx」，「Gy」，「Fxy」，「$Gxyz$」とこれと同種のもの，および，これらから真理関数と量化によって構成されうるすべての複合的表現が含まれる．

そこで，文字「F」，「G」，…は，けっして，属性またはクラスなどを値としてとる変項と考えられるべきではない．それでも，これら属性やクラス，または他の抽象的対象が，量化の真正の変項「x」，「y」，…がそこから値をとることの許されているわれわれの議論領域(universe of discourse)に，もちろん属しているかもしれない．しかし，文字「F」，「G」，…は，量化子として用いられることが許されないどころか，文からもまったくはずされていて，ただ，特定化されていない文の形式を描くときにまがいものとして使われるだけである．

「Fxy」，「Gx」，「Gy」等の原子〔言明〕型(atomic schemata)は，どのように複雑な文を表わしてもよい；それは，「F」と「G」のかわりに単純な述語を公然と有する原子文を表わすにとどまらない．

特定の理論は，量化子と真理関数を使用する点でたがいに似ているが，一方，ふつう，議論領域の点で，またその特殊な述語の語彙の点で，たがいに異なっている．しかし，これらの特殊な点がなんであるにせよ，ある形式の文がいつでも真になる，と見こむことはできる．そのような形式を描写している言明型は**妥当**(*valid*)である，とよばれる．典型的なのは：

$$(y)((x)Fx \supset Fy), \quad (y)(Fy \supset (\exists x)Fx), \quad (x)Fx \supset (\exists x)Fx,$$
$$(x)(Fx \supset Gx) \supset .\ (x)Fx \supset (x)Gx$$

である．与えられた特殊な理論が，変項「x」および「y」の値域(range)として空でないどのような議論領域を課そうとも，また，「x」および「y」を含むどのような特殊な文が，「Fx」，「Fy」および「Gx」の解釈として，その理論の特殊な語彙から作られようとも(それらの文が，そのうえ，どのような自由変項を含んでいようとも，それら自由変項のすべての値に対して)，上の形式の文は一様に真になるとあてにしてよい．

いかなる特殊な理論の定理も，このように，妥当な〔言明〕型の例であるすべての文を，出発点として含むことになろう．さらに，当の特殊な理論の語彙の意図された解釈に適した特殊な定理がそれに加わる．これらの定理のうち，幾つかは公理として要請される．他のものは，次の意味で論理的に**帰結する**(*follow*)：それらの定理は，「$p \supset q$」という条件形式の文の「q」の位置をしめる．ただし，「p」の位置は公理によってしめられ，条件文

は全体として妥当な〔言明〕型の一例である.

近代論理学の文献には,〔言明〕型の妥当性を証明する有効かつ完全なテクニックが豊富に見られる. 私は, 読者がこれらのテクニックのひとつ以上を熟知しているものと仮定し, そのどれをも詳細には述べないことにする. 幾つかのはっきりしない〔言明〕型の妥当性に訴えるか, または, ある特定の文が他のものから論理的に帰結することを示さねばならぬことがおこる場合には, 私は, 読者が自分の選んだ論理的なテクニックに従って形式的な議論を十分に補なう見こみがある程度に, 直観的な議論を提示するにとどめるであろう.

私はまた,「p」,「Fx」,「Fy」等に対する文の代入を支配している約束に精通していることを仮定するであろう[1]. たとえば,「Fx」に代入される文が「x」のほかに自由変項をもっている場合には, それらの自由変項は, 代入が行なわれる言明型の外側にある量化子によって捕えられるようなものであってはならない. かくして, 妥当な〔言明〕型[2]:

$$(x)(y)(Fx \equiv Gy) \supset (x)(y)(Gx \equiv Gy)$$

において,「Fx」に「$y=x-x$」を代入することは,

$$(x)(y)(y = x - x \,.\!\equiv\!.\, y = 0) \supset (x)(y)(x = 0 \,.\!\equiv\!.\, y = 0)$$

のような偽を推論することになるので, 誤まりである.

論理学を学んでいる人たちは, また, 量化〔言明〕型の妥当性に関する第2段階のいくつかの一般化ともおなじみである. これらのなかで顕著なのは, **双条件の代入可能性**(*substitutivity of the biconditional*)で, これは次のように表現される:

$$(x_1)\ldots(x_n)(A \equiv B) \,.\, C_A \,.\!\supset C_B.$$

ここで,「A」,「B」,「C_A」および「C_B」は, 任意の量化〔言明〕型を表わし,「C_A」,「C_B」という終りの二つは, 対応する部分として,「A」および「B」によって表わされる〔言明〕型を含んでいる点をのぞいておなじである; そして,「x_1」, …,「x_n」はそれぞれ,「A」および「B」によって表わされる〔言明〕型では自由であるが,「C_A」および「C_B」によって表わされる〔言明〕型では量化子によって捕えられるようなすべての変項を表わしている[3].

量化理論: つまり, 特定の理論の実際の述語をすべて抽象した, 文の外的形式の論理,

---

1 たとえば私の *Methods of Logic*, §§23, 25 を見よ.

2 このような, 一座(one-place)述語文字のみを含む〔言明〕型に対しては, 妥当性の機械的なテストが知られている. たとえば, *Methods of Logic*, 107—117 ページ, 192—195 ページ(中村・大森訳『論理学の方法』岩波書店, 109—118 ページ, 190—194 ページ)を見よ.

3 たとえば, 私の *Mathematical Logic*, §18 を見よ.

はこれだけにしておこう．つぎに，ひとつの特定の述語に注意を向けよう．この述語もまた，あらゆる種類の理論にたえずくりかえし現われることと，あらゆる種類の議論領域に関連することとから，論理という見出しの下で考察されるのが慣例である．それは，**同一性**(*identity*)の二座述語「＝」である．同一性の適切な公理は，「$x=x$」と，**同一性の代入可能性**(*substitutivity of identity*)を表わす〔言明〕型「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」のすべての個々の例である．これから，量化理論によって，同一性の全法則が帰結する[4]．たとえば，この言明型の一例として

$$x = y : x = x \,.\supset.\, x = x :\supset: x = y \,.\supset.\, y = x$$

をうるが，これは，真理関数的論理によって，「$x=y\,.\supset.\,y=x$」に帰着する[5]．別例：「$y=y$」から「$Fy\supset.\,y=y\,.\,Fy$」がえられ，したがって，

$$Fy \supset (\exists x)(x = y \,.\, Fx)$$

がえられる．そして，「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」から，逆に，

$$(\exists x)(x = y \,.\, Fx) \supset Fy$$

がえられる．したがって，両者を結合して，

$$Fy \equiv (\exists x)(x = y \,.\, Fx).$$

ついでながら，この最後の〔言明〕型は，逆にそれだけで「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」および「$y=y$」の双方を，かくて同一性の全法則を生みだすのに十分である[6]．なぜなら，それは，あきらかに，「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」を生みだすし，さらに，代入例：

$$y \neq y \,.\equiv (\exists x)(x = y \,.\, x \neq y)$$

をもつが，これは，右辺の矛盾によって，「$y=y$」に帰着する．

特定の理論は，おのおの，述語の基礎的な語彙をもっている．これらの述語は，定義によって導入され，複合文の省略形を提供するにすぎないような他の述語から区別されて，**原初的**(*primitive*)とよばれる．原初的述語の数は，ふつう，有限箇であろう．原初的述語が有限箇の場合には，われわれは「＝」を必ずしも原初的述語のうちに数えいれる必要はない；それは残りの述語でつねに定義されうる．そこで，ある理論の唯一の原初的述語

4 Gödel, 1930，定理 VIII.
5 公理「$x=x$」を使わないこの証明は，Hilbert and Bernays, vol. 1, 376 ページ註による．
6 これは Wang が私に指摘してくれた．

が二座述語「ϕ」であると仮定しよう．すると，「$x=y$」を次のように説明することによって，「$=$」はその理論に対して十分に定義されよう：

$$\text{(i)} \qquad (z)(\phi xz \equiv \phi yz \,.\, \phi zx \equiv \phi zy).$$

なぜなら，「$x=x$」は，この定義に従って解釈すれば，あきらかに，妥当な量化〔言明〕型のほんの一例にすぎないからである．さらに，「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」のすべての例についても，それらが「ϕ」以外の述語を含まぬ文であるかぎり同様である．これは次のようにして分る．まず，「Fx」および「Fy」によって表わされる文が，ただ一箇所で異なる例を考えよう．「x」および「y」がただ一箇所で異なって現われる直接の文脈は，それぞれ，「ϕxv」と「ϕyv」か，または「ϕvx」と「ϕvy」かのいずれかでなければならない．ただし，「v」はあるひとつの変項(それ自身，こんどは，「x」または「y」でもありうる)を表わす．双条件の代入可能性によって，もし直接の文脈が「ϕxv」と「ϕyv」であれば，

$$(z)(\phi xz \equiv \phi yz)\,.\, Fx\,.\supset Fy$$

を，また他の場合には

$$(z)(\phi zx \equiv \phi zy)\,.\, Fx\,.\supset Fy$$

をうる．したがって，いずれにしても，(i)のごとく定義した「$x=y$」に対して，「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」をうる．かくして，われわれの〔言明〕型は，「Fx」および「Fy」によって表わされる文がただ一箇所で異なる場合に対して証明される．最後に，n 箇所の場合に対する拡張は，次のようになる．$i\leqq n$ なるおのおのの i に対して，「$G_i y$」は，「Fx」によって表わされる文に，当の「x」が n 箇現われるうちでちょうど最初の i 箇に「y」を代入したときに生ずるものを表わすこととする．すると，代入する場所が一箇の場合に対するわれわれの定理は，0 から $n-1$ までのおのおのの i に対して，「$x=y\,.\,G_i y\,.\supset G_{i+1}y$」を与える．そして，これらは一緒になって，「$x=y\,.\,G_0 y\,.\supset G_n y$」または「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」を含意する．

それゆえ，唯一の原初的述語が「ϕ」であるかぎり，同一性のすべての法則は，特別の仮定なしに生ずることが分る；なぜなら，同一性の全法則は，「$x=x$」と「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」に由来し，定義(i)が，これらに対して十分であることをいま見たばかりだからである．

ある理論の原初的述語がただ二座述語 ϕ だけでなく，また，たとえば一座述語 ψ と三座述語 χ をも含む場合には，その理論の目的のために，われわれは「$x=y$」を，(i)のようにではなく，次のように定義するであろう：

$$\text{(ii)}\qquad \phi x \equiv \phi y \,.\, (z)(\phi xz \equiv \phi yz \,.\, \phi zx \equiv \phi zy \,.$$
$$(w)(\chi xzw \equiv \chi yzw \,.\, \chi zxw \equiv \chi zyw \,.\, \chi zwx \equiv \chi zwy)).$$

他の理論に対しても同様である：われわれは，「$x=y$」を，原子的文脈を全部つくして，(i)および(ii)におけるように定義し，それからこれまで見てきたのと本質的におなじ推理によって，「$x=x$」および「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」を確証する．

(i)および(ii)で例証された方式での定義によって与えられる「$x=y$」の意味は，実際に同一性であるかもしれないし，またそうでないかもしれない；これは，原初的述語と量化の領域に対して採用される解釈によって，きまるであろう．もし領域として実数のそれをとり，「ϕ」を「$<$」の意味にとれば，(i)は「$(z)(z<x\,.\equiv.\,z<y)$」を含意し，かくして，「$x=y$」に真の同一性の意味を賦与するであろう．個々の実数をすべて取りだすための，表現可能なはっきりした条件がないということは，この好都合な結果にとってはどうでもよいことである．もし，領域として人間のそれをとり，述語を，人びとの収入以外のいかなるものにも依存しないような仕方で解釈するならば，上に提出されたような「$x=y$」の定義は，収入の等しい人はみな同一人とみることになろう；したがって，この場合は，実際好ましくないケースであり，「$x=y$」は真の同一性をいっていない．この種のケースでは，領域および述語の解釈の選択が誤まっているのであって，領域のメンバーを同一収入のグループ全体と解釈しなおす方がよい，と抗議しうる．しかし，最悪の場合でも，たとえ，「$x=y$」の定義方法を維持するために，解釈をこのように修正しないとしても，なお，それ〔「$x=y$」〕と真の同一性とのあいだのどのようなくい違いも，その理論自身の言葉では記録されえないのである．かくして，このひねくれた場合でさえ，上の方法は，当の理論の目的に対して同一性と同然のあるものを定義している[7]．

あきらかに，(i)および(ii)で例証した方式は，原初的述語の数が普通のように有限であるときはいつでも，使える．それらの数が無限のときでさえ，ふつう，その解釈は，「$x=y$」がそれら(原初的述語)の若干箇のものによって適当に定義されうるようなものである．しかし，反対の場合もおこりうる．次のように原初的述語が，「ϕ_1」，「ϕ_2」，「ϕ_3」，… で，そのおのおのが一座で，しかもおのおのの i に対して，

$$(\exists x)(\phi_1 x \,.\, \phi_2 x \,.\, \ldots \,.\, \phi_{i-1} x \,.\, \sim\phi_i x)$$

7　この同一性の消去法は，Hilbert and Bernays, vol. 1, 381 ページ以下によって再認識された．それと，不可弁別者の同一性(identity of indiscernibles)との関係については，私の *Word and Object*, 230 ページを見よ．

となるような理論を考えてみよう．この場合「=」は，もしそれが役に立つべきものとすれば，原初的述語としてつけ加えられねばならない．

2. 仮クラス

以下の諸章では，理論一般ではなく，クラスにとくにかかわる理論を扱うであろう；そして，これらの理論は，一様に一箇の原初的述語，すなわち，クラス・メンバー性(class membership)を表わす二座述語「ϵ」を含んでいるという形で考えられることとなろう．しかし，通例，「ϵ」の助けをかりてクラスについていわれる事柄の多くは，クラスに対するなんら実際上の言及も，また「ϵ」の還元不可能な使用も含まずに，単なる話し方として説明される．クラス理論のこの部分——それを私はクラスの**仮**(*virtual*)理論とよぶ——と，これに類似した関係の仮理論に，この章のあとの部分をあてることにする．したがって，この章のあとの部分には，これまでの観点が継承されているわけである：つまり，どのような主題に関するものであるにせよ，ひきつづき，われわれは，そのおのおのがその特殊な原初的述語を有する諸理論について一般的に考えるのであって，原初的な「ϵ」を有する理論についてだけ考えるのではない．

そのような理論に，どのようにして見かけ上のクラス・メンバー性を表わすもっともらしい重宝な補助物「ϵ」が純粋に記法上の附加物としての定義によって導入されうるか，を見よう．基本的なトリックは，Fx であるようなすべての対象 x のクラスを示そうとするところのクラス抽象の記法「$\{x: Fx\}$」の形式と一緒に「ϵ」を定義することにある．

ここで考察するような消去可能な結びつきにおいては，「ϵ」はクラス抽象体(class abstract)の前にだけ現われ，クラス抽象体は「ϵ」の後にだけ現われる．結びつき全体「$y \in \{x: Fx\}$」は，私が**具体化の法則**[1](*law of concretion*)とよぶものによって，「Fy」に帰着し，その結果，クラス$\{x: Fx\}$といったものが存在する，ということを示すようなヒントはなにも残らない．立場を変えて，消去ではなく導入について語るなら，「ϵ」とクラス抽象体とを，単に，全体として次のように定義された結びつきの断片とみなしてよい：

2.1　　「$y \in \{x: Fx\}$」は「Fy」を表わす．

もしもわれわれが不注意にも，たとえば，「$x=1\,.\,(\exists y)Fy$」を「$_*(Fx)$」と書くことに同

1　1934, 48ページ．これは，Whitehead and Russell(*20.3)とFrege(1893, 52ページ)によって述べられた．

意したとすれば，誤まって「$F0 \equiv F1$」から「$_*(F0) \equiv _*(F1)$」を推論することになるであろう．いま，この種の誤まりを考慮すると，2.1 のように，定義される式にはあるが定義する式にはない「Fx」を呈示している定義にわれわれは疑念をいだくに違いない．しかし，われわれは 2.1 を次のように補正することができる：

2.1′　　「$y \in \{x : Fx\}$」は「$(\exists x)(x = y \,.\, Fx)$」を表わす．

2.1 と 2.1′ における定義している方の式は 12 ページで等値なことが示されている．

ところで，2.1′ は抽象の変項――「$\{x : Fx\}$」の「x」――の地位が，単に，量化の束縛変項の地位であることを明らかにしているが，これに反して，2.1 は，定義する式「Fy」のうちには対応する部分のない，どちらかといえば前例のない役割においてその変項を導入していた．

私が「x」,「y」,「Fx」, 等々，によって定義を述べるときには，その定義が，「x」,「y」, 等々，の位置にはどんな変項をも，また，「Fx」の位置には(われわれがどんな理論を扱っているにせよその理論の)どんな文を選んでもよいことを意味している．2.1 に対しては,「Fx」と「Fy」によって表わされている文が当初意図していた関係は，もちろん，前者が自由な「x」をもつところでは，後者は自由な「y」をもっているということをのぞけば，それらはおなじだ，ということであった．もし「Fx」によって表わされる文が「Fy」の「y」を束縛するような量化子をたまたま含んでいるならば，それを避けるように量化の変項を書きなおすものと理解されねばならない；たとえば，われわれは次の式：

$$y \in \{x : (\exists y)(x = y^2)\}$$

を説明しているような 2.1 を，「$(\exists y)(y = y^2)$」としてではなく，「$(\exists z)(y = z^2)$」と理解しなければならない．さて，2.1′ の第 3 の利点は，このような廻りくどい書きなおしが必要でないということである；2.1′ の定義式は，「Fx」によって表わされる文中に「y」の量化があるということには無関係である．

しかしながら，2.1′ はそのかわりに新しい困難をひきおこす：われわれは，もはや,「y」に「x」をいれることができない．2.1 では，それが可能であった；「$x \in \{x : Fx\}$」はまったく適切にも「Fx」となった，しかし，2.1′ の下では，「$x \in \{x : Fx\}$」は，まったく不適切なことに,「$(\exists x)(x = x \,.\, Fx)$」，または「$(\exists x)Fx$」となってしまうであろう．ところで，おなじ薬をもう一服のめば，これも癒る．われわれは次のように書くことができる：

2.1″ 「$y \in \{x: Fx\}$」は「$(\exists z)(z = y \,.\, (\exists x)(x = z \,.\, Fx))$」を表わす.

ただし,「z」は「Fx」によって表わされる文中で自由であってはならない. しかし, ここまでは標準的な便法である;その定義式が被定義式にはない束縛変項を有する定義を用いるときには, その文脈にはない新しい文字によって変項を表わす用意がなければならない.

これら微細な点を注意しておいたうえで, 私は簡潔さからして, 2.1を使用しつづけることにする[2].

クラスについてのわれわれの見かけ上の話を, 次の便法を通してクラスのブール代数のよく知られた記法を導入することによって, 一歩進めることができる. その際,「ϵ」以外のギリシャ文字は, 任意のクラス抽象体を表わす型文字である[3].

2.2 「$\alpha \subseteq \beta$」は「$(x)(x \in \alpha \,.\!\supset\!.\, x \in \beta)$」を表わす, (包含(inclusion))
2.3 「$\alpha \subset \beta$」は「$\alpha \subseteq \beta \not\subseteq \alpha$」を表わす, (真の包含(proper inclusion))[4]
2.4 「$\alpha \cup \beta$」は「$\{x: x \in \alpha \,.\!\vee\!.\, x \in \beta\}$」を表わす, (合併(union))
2.5 「$\alpha \cap \beta$」は「$\{x: x \in \alpha \,.\, x \in \beta\}$」を表わす, (共通部分(intersection))
2.6 「$\bar{\alpha}$」または「$^{-}\alpha$」は「$\{x: x \notin \alpha\}$」を表わす. (補クラス(complement))[4]

このようなクラス記法は, すべて, 見てとられるように, それ以前の表現に還元できる. それは, 量化の論理学の図式的表示に関する記法上の洗練とも, あるいは, 原初的述語の任意の特定の語彙を有する任意の特定の理論の記法に関する表記上の洗練ともみなされうる.

記法「$x=y$」のこのような語彙を基礎にする定義(§1の(i), (ii)参照)は,「$\alpha=\beta$」には拡張されない;なぜなら, 型文字「α」と「β」によって表わされるクラス抽象体は, 2.1を通してのみ現われ, 真正の変項「x」と「y」の位置にくる資格はないからである. しかし,「$\alpha=\beta$」の独立した定義は, おなじような推理によってえられる:

2.7 「$\alpha = \beta$」は「$(x)(x \in \alpha \,.\!\equiv\!.\, x \in \beta)$」または「$\alpha \subseteq \beta \subseteq \alpha$」を表わす.

---

2 2.1″についてのこれ以上の註釈に関しては, §4を見よ.

3 §4から先で, さかのぼってこれらの定義を参照するときは, ギリシャ文字はむしろ, 抽象体と変項の双方を表わす;§4参照.

4 いくつかの分りきった短縮法は, 番号のついた定義という儀式をとらずに, 適当に認められているものとする. こういった趣旨から,「$\not\subseteq$」,「$\notin$」および「$\neq$」における打ち消しを置き場所の変った「$\sim$」として認め,「$x=y=z$」,「$\alpha\subseteq\beta\not\subseteq\alpha$」,「$x, y \in \alpha$」および類似のものは, 短縮された連言として認めることにしよう. ——遺憾ながら,「$\subset$」は「$\subseteq$」を表わす古い記号であり, Whitehead and Russellから今日にいたるまで, 出版物においては, 私自身のものの多くを含めて, その意味に使われている. しかし,「$\subseteq$」を広い意味に使う人びとによって,「$\subset$」は, いまでは2.3のように, せまい意味に使われている. とにかく「$\subseteq$」は混同を招かないであろうから, 私はこの傾向に従うことにきめた.

以前の「$x=y$」は，それ自身，ある有用なクラスの表現を形成するのに，次のように利用できる．xの単一クラスと，さらに，枚挙によって与えられる有限クラスに対して，記法：

「$\{x\}$」は「$\{z: z=x\}$」を，「$\{x, y\}$」は「$\{x\} \cup \{y\}$」を表わす，

等々[5]，および，空クラス(null class)に対しては，

2.8 「Λ」または「$\{\ \}$」は，「$\{z: z \neq z\}$」を表わす．

また，Λ の相手として，普遍クラス(universal class)も定義してよい[6]：

2.9 「$\mathcal{V}$」は，「$\{z: z=z\}$」または「$^{-}\Lambda$」を表わす．

クラスと関係の仮理論にこの名称が与えられたのは，1942年の私のブラジルでの講義においてであった[7]．この着想と文献に現われる他のいくつかの考え方とを混同することは，以下の諸章の理解を妨げることにもなるであろう．そこで，これらの考え方を選別しておこう[8]．

定義2.1は，ラッセルの文脈的定義によるクラスの導入を思いださせる[9]．だが，本質的な相違がある．2.1の型文字「F」のラッセルにおける見かけ上の対応物は，彼にとって，型文字ではなく，値として属性を取る量化可能な変項である．この点が，不正確な術語によって，ラッセルとなん人かの彼の読者たちとにおおい隠されていた：彼は，「命題関数」(propositional function)を，属性と，開放文あるいは述語との双方に言及するのに用いた．実際，彼はクラスの理論を，還元されていない属性の理論に還元したにすぎない．彼ははっきりクラスを仮定したほうがよかったかもしれない．なぜなら，属性は，より明瞭でも，より経済的でもないからである；むしろ，その反対である．(序論参照．)

クラスと関係に関するいろいろな演算は，ベーマン(Behmann)(1927)により，文結合子(sentence connectives)に対する単なる記法上の変形として導入されている；たとえば，「$\alpha \cap \beta$」と「$\alpha \cup \beta$」は，「$x \in \alpha \cap \beta$」と「$x \in \alpha \cup \beta$」を「$x \in \alpha \,.\, x \in \beta$」と「$x \in \alpha \,\mathbf{.v.}\, x \in \beta$」に対する省略として説明することによって，導入される．事実，この点に関するかぎり，

5　これらの定義に番号をつけない理由は，§7に出てくる．

6　スクリプト体〔たとえば，$\mathcal{V}$〕の使用は，§6の終りで説明される．

7　*O Sentido da nova lógica*, §51．また，Martin を参照，彼はおなじころにその着想をのべていた；さらに，私の『Theory of classes presupposing no canons of type』，325ページ参照．

8　主題に慣れていない読者は，後の章に精通するまで，この節のあとの部分の不完全な把握で適当に満足してよい．

9　1908．また，Whitehead and Russell にもある．以下§35を見よ．

クラスの仮理論と，以下では，関係の仮理論において，私はベーマンに従う．だがこの場合にも，相違は決定的である：ベーマンは，量化可能な変項の値としてクラスと関係を仮定している．

集合と究極クラス(序論参照)の区別は，実クラスと仮クラスのそれと混同さるべきではない．究極クラスは，それを認める理論にとっては，実〔クラス〕である：それらは，その議論領域に属し，量化可能な変項の値である．他方，クラスの仮理論は，変項の値としてクラスに訴えることはない；それは，あたかもクラスが存在するかのごとくに，多くを語るが，しかし，この語っている事柄をクラスを仮定することなしに説明する．

カントールの1899年の歴史的書簡(443ページ以下)で一部考案されている公理系は，どちらの方向においても展開できる．彼は，集合(*Menge*)を，『ひとつのもの』，『完結したもの』として，『まとまってあるものと考えられる』クラス(*Klasse*)または多(*Vielheit*)として，記述した．彼は，続けて，クラスまたは多は，もしそれが集合とおなじサイズならば集合であることを要請するにいたった；それが集合の部分クラスである場合も同様である；また，集合のメンバーのすべてのメンバーのクラスである場合にも同様である．さて，そのような公理は，どちらの方向においても：つまり，集合以外のクラスに究極クラスの地位を認めることによっても，あるいは，集合以外のクラスを仮〔のもの〕として片づけてしまうことによっても，形式化できる．それはひとつの選択であって，そのほかに何が語りえ，あるいは語りえないかについての差異がその選択にかかっている．なぜなら，それは，量化がより広い領域の上で自由に利用されうるかどうかという問題だからである．しかし，どちらのコースもカントールの行き方にあっているであろう．

ベルナイスが彼の1958年の体系において，集合に対してクラスとよんだものは，まさしく私の意味での仮クラスである；それらは，究極クラスにせよ，あるいはそうでないにせよ，実クラスではない．その体系には(彼の以前の体系とは違って)究極クラスはない；彼の変項の唯一の値は集合である．この点，私が以下のII—X章において展開するであろう集合論は，彼の体系に類似している．しかし，私は彼がしている以上に，仮理論を実理論により緊密に結びつけるであろう：彼とは違って，私は，仮クラスをそれに対応する集合が存在するときは集合と同一視するであろう．

XIII—XIV章と二・三の中間の挿入部分において，結局，究極クラスを研究するようになるときには，われわれは三つの称号：集合，究極クラス，および仮クラスを並列的にもつことになろう．このパターンは，ゲーデル(Gödel)の1940年の論文とほとんどおなじであ

る；なぜなら，私の仮クラスは，スタイル上の二点を別にすれば，まさにゲーデルの『概念』(notion) だからである．ひとつの点とは，ゲーデルと違って，私はそれらをクラスの演算およびそれに類似のものに服させて，あたかもクラスについてのごとくに語る，ということである．もうひとつの点とは，再び，仮クラスを，それに対応する実クラス——それが集合であるにせよ究極クラスであるにせよ——が存在するときには，結局その実クラスと同一視する，ということである．

究極クラスの仮定と仮クラスという虚構とのあいだには，それ以上の事柄を語るために利用できる機構という点で相違があることを私は強調した．余分の機構が使用されないならば，相違の重要性は減少する．かくして，カントールの書簡の場合には，二つの視点のうちのひとつを選ぶことはできない．ベルナイスの初期の体系(1937—54)の場合には，その事情はやや似かよっている；なるほど，彼の究極クラスの仮定は公然のものではあったが，その後(1958, 43 ページ)彼が注意しているように，究極クラスにあまり負担を負わせなかった．私の『数理論理学』の体系においては，究極クラスはより中心的な役割を演じている[10]．

3. 仮関係

このクラスの仮理論に類似し，かつそれと結びついて**関係**(*relations*)の仮理論がある．クラス抽象の記法と並んで，関係抽象の記法「$\{xy: Fxy\}$」があるが，これは，あるもの x のあるもの y に対する Fxy なる関係を示そうとするものである．クラス抽象体に対する型文字として「α」,「β」, ... を使用するのと同様に，関係抽象体に対する型文字として，「P」,「Q」,「R」, ... を使用するであろう．最後に，クラス・メンバー性の記法「$x \in \alpha$」とおなじく，**関係帰属** (*relational attribution*) の記法がある：「xRy」は，x が y に対して関係 R をもつことを意味する．2.1 においてメンバー性とクラス抽象とをあわせて定義するのにクラスに対する具体化の法則が用いられたのとおなじように，関係に対する具体化の法則は，関係の帰属と抽象とをあわせて定義する：

$$「z\{xy: Fxy\}w」は「Fzw」を表わす.$$

2.2—2.7 と平行に次のように定義してよい：

$$「Q \subseteq R」は「(x)(y)(xQy \supset xRy)」を表わす,$$

10　これらの事柄についてより詳しくは，以下，§§42—44 を見よ．

「$Q \subset R$」は「$Q \subseteq R \not\subseteq Q$」を表わす,
「$Q \cup R$」は「$\{xy: xQy \vee xRy\}$」を表わす,
「$Q \cap R$」は「$\{xy: xQy \,.\, xRy\}$」を表わす,
「^{-}R」は「$\{xy: \sim xRy\}$」を表わす,
「$Q = R$」は「$(x)(y)(xQy \equiv xRy)$」を表わす.

「Λ」および「$\mho$」と平行に,「$\Lambda \times \Lambda$」と「$\mho \times \mho$」とがあるが,これら二つは,二つのクラスの**直積**(*Cartesian product*)についての次の一般的な定義にあてはまる例として現われている:

$$「\alpha \times \beta」は「\{xy: x \in \alpha \,.\, y \in \beta\}」を表わす.$$

この後の概念は,クラスの代数には類似のものがないところの,関係についてのみ現われる,一群の有用な概念の典型である.その他の有用な概念は次のようなものである:

「$\breve{R}$」または「$\breve{\ }R$」は,「$\{xy: yRx\}$」を表わす,　(関係の逆(converse))
「$Q|R$」は「$\{xz: (\exists y)(xQy \,.\, yRz)\}$」を表わす,　(関係の積(resultant))
「$R``\alpha$」は「$\{x: (\exists y)(xRy \,.\, y \in \alpha)\}$」を表わす,　(関係の像(image))
「I」は「$\{xy: x = y\}$」を表わす.　(関係としての同一性)

これらの概念は,その数をふやすこともできたであろう.しかし,これら以外の有用な概念のうちのいくつかは,すでに導入した記号で簡潔に表現できる.かくして,Rの**左域**(*left field*)とよばれる$\{x: (\exists y)xRy\}$は$R``\mho$である;**右域**(*right field*)は$\breve{R}``\mho$である;**全域**(*field*)は$(R \cup \breve{R})``\mho$である.さらに,$\{x: xRy\}$は,どのような名前でよばれるにせよ有用な概念であるが,それは$R``\{y\}$である.

特殊な種類の関係に対する,よく知られていてしかも有用な術語に対応している式がすぐ見出される:

Rは連結的(connected)である: $(x)(y)(x, y \in (R \cup \breve{R})``\mho \,.\!\supset x(R \cup \breve{R} \cup I)y)$,
反射的(reflexive)である: $(x)(x \in (R \cup \breve{R})``\mho \,.\!\supset xRx)$,
非反射的(irreflexive)である: $R \subseteq {}^{-}I$,
対称的(symmetric)である: $R = \breve{R}$,
非対称的(asymmetric)である: $R \subseteq {}^{-}R$,
反対称的(antisymmetric)である: $R \cap \breve{R} \subseteq I$,
推移的(transitive)である: $R|R \subseteq R$,

非推移的(intransitive)である: $R|R \subseteq {}^{-}R$.

これまで取り扱ってきた関係は，二項関係である．同様に，三項関係 $\{xyz: Fxyz\}$ や，より高次の関係もまた与えることができる．

関数は関係として説明されうるから，関係の使用で重要なのは関数としてのそれである．たとえば，『の平方』という関数は，平方の平方根に対する関係 $\{xy: x=y^2\}$ として説明される．すべての関係が関数とみなされるわけではない；関数を他のものと区別する特徴は，R が関数であるとき，x の R (*the R* of x)について，もしそれがあれば，一義的に語ることができることである：たとえば，n の平方(*the* square of n)．二項関係は，どの二つのものもおなじものに対してその関係をもつことがないならば，関数である．そこで，こう定義してよい：

「Func R」は，「$R|\breve{R} \subseteq I$」または「$(x)(y)(z)(xRz \,.\, yRz \,.\!\supset\!.\, x = y)$」を表わす．

これは，「関数」が「一価関数」の意味で用いられていることを意味する．しばしば，多価関数として引合いにだされるものは，単に関係として言及されるのがもっともよい．解析幾何や微積分においては，連続性の考察からして，いわゆる多価関数と他の関係を区別することがたしかに肝要である；しかし，ここではそうでない．

所期の意味での典型的な関数は，

$$\{xy: (\exists z)(\exists w)(w \neq 0 \,.\, x = z/w \,.\, y = 2^z \cdot 3^w)\}$$

である．この関数が，$108\,(=2^2 \cdot 3^3)$ と $11{,}664\,(=2^4 \cdot 3^6)$ の双方に，おなじ有理数 $\frac{2}{3}$ を割りあてることに注意されたい；また，この関数がそれに対してなにものをも割りあてることのないいくつかの数，たとえば5があり，あるいはなにものも割りあてないというその点に関するかぎりでは，0があることに注意されたい．これらの欠点のどれも，それが関数であることに反するものではない．それを関数たらしめるものは，それがおなじものに対してひとつ以上のものをけっして割りあてない，ということである．

どんな二つのものもおなじものに対して R をもたないことを意味して「Func R」と書きうる以外に，非関数 R とあるもの x についてさえも，ただひとつのものが x に対して関係 R をもつと言いうるのが便利である．そのようなもの x は，R の**独立変項**(*arguments*)とよばれ，それらのクラスは次のように定義できる：

「arg R」は「$\{x: (\exists y)(R``\{x\} = \{y\})\}$」を表わす．

たとえば，R が息子関係である場合，arg R はひとり，そして，ただひとりの息子をもつ人びとのクラスである．あきらかに，

$$\text{(i)} \qquad \text{Func}\, R \equiv .\ \text{arg}\, R = \breve{R}``\mho.$$

関数を二項関係と考える際に，われわれは，父，平方，二分の一，二倍のように，一箇の独立変項の関数であるような関数だけを与えてきた．おなじような考察は，より一般に，n 個の独立変項の関数を $n+1$ 項の関係として与える；このようにして，二箇の独立変項の関数としての巾や和の関数は，三項関係

$$\{xyz : x = y^z\}, \qquad \{xyz : x = y+z\}$$

として説明されよう．

関数をこのように解釈する点で，私はペアノ (Peano) (1911) に従い，ゲーデル (1940) と一致している．しかし，この十年間に，論理的には筋が通らず，実際上はいらだたしい，さまざまなスタイルが現われてきた．値を左域に，独立変項を右域に考えるかわりに，逆のプランのとられることが少なくない．そのとき，たとえば平方関数は，平方の平方根に対する関係としてではなく，平方根の平方に対する関係ととられる．

いやしくも関数を関係と同一視しようとするなら，平方(あるいは，父)関数を平方(あるいは，父)関係と同一視するのが自然である，という点で，私の方法(ペアノやゲーデルのそれ)は自然である；そして，たしかに，平方関係は平方の平方根に対する関係であり，それは，父関係が父の子に対する関係なのとおなじである．Q と R がこのように解釈された関数であるとき，x の R の Q (Q of R of x) が，x の $Q|R$ ($Q|R$ of x) となるという点でも，この方法は自然である；もうひとつの表現では，これは x の $R|Q$ ($R|Q$ of x) になる*.

逆の方法は，ひとつの点ではより自然だといえよう：関数は独立変項を値へ変換し，かくして，独立変項から値へ(*to*)導く．そして，このようにして，関数が独立変項の値に対する(*to*)関係と自然に同一視される．しかし，私にはこの議論は片手落ちと思われる．

この逆の方法がたまたま支持されたのは，次のように，術語に伴なう偶然のためである．$R``\mho$ は，少くとも 1903 年(ラッセル)以来，関係の**変域**(*domain*)と，$\breve{R}``\mho$ は逆変域(converse domain)とよばれてきた．他方，一般に関数の独立変項は変域を，値は値域(range)を構成するといわれている．関数を私の方法(とペアノのそれ)と反対にとることは，関数の変域を関係の変域とすることである．

* この点では，英語と日本語の語順の違いが決定的にきいてくることに留意されたい．

そのように恣意的な点については，多数者の用法が決定的なのだと思われるかもしれない；多数の人が，いまや，きりかえることを好むのではないかと思う．しかし，厄介はいっそう増す．かくて，Rが関数であるとき，$R``\alpha$をどう扱うべきであろうか？　もし，像$R``\alpha$について上の定義をそのままにして，関数の表現法をきりかえるならば，$R``\alpha$は，$\alpha$における独立変項に対する$R$の値のクラスではなく，$\alpha$における値に対する$R$の独立変項のクラスとなる．そこで，ぴったりゆくようにと$R``\alpha$の定義をきりかえる著者たちが見出されるのである；$R``\alpha$は，

$$\{y : (\exists x)(xRy \,.\, x \in \alpha)\}$$

となる．その結果，$R``\alpha$はまた，望み通り，関数のきりかえた意味での関数$R$による$\alpha$の像である．だがこのとき，$R``\alpha$は，もはや，関係R一般にとって，αのメンバーに対してRを有するもののクラスではなくなってしまう；かくして，用法はあらためて混乱する．

このいまのべた不愉快な事柄と$R|Q$なる現象の歴然とした頑固さとから，私はゲーデルとともに，時流にさからう古いペアノの便法を守ることにしたのである．その自然さを擁護している私の第1の点も有力ではあるが，私はその点では喜んで譲ってもよかった．「変域」に関する対立する難点については，私は，関係との関連ではその語を棄てて，もつれをといた．「左域」と「右域」は，なにものも想像させない；それで，関数の独立変項について，これが(私にとってはそうであるように)右域であろうが，左域であろうが，いつでもその変域をふくむものとして人は自由に語ることになる．

実際上ではきわめて煩わしいという理由から，論理的には些細な便法上の点に多くのスペースをさいてきた．証明や定理をとくと考える際の，うまくいく場合でもかなりの困難は，関数がどのようにとられるべきか，そしてそのときに，「$R``\alpha$」と「$Q|R$」をどのようなものとすべきか，を考えねばならぬために，しばしば悪化する．恣意と不注意から，用法の一見小さな点をきりかえた数学者は，彼がどんな重荷を創りだしたか考えてもみなかったのである．

クラスと関係に関する豊富な記法は，いまや，手もとにある；そして，きめられた話し方として以外は，クラスや関係といったものをまったく認めないような仕方で，記法をどのように定義するかをこれまで見てきた．クラスや関係について，このように見かけだけの消去可能なものとして語る動機は，表現の簡潔さである．そこで，再び，すこし前の考

察 (i) をとろう．それは，クラスと関係の仮理論の任意の妥当な〔言明〕型と同様に，量化と同一性との論理学の妥当な〔言明〕型のひとつに数えられる．だが，どんな型か？ (i) の「R」を「$\{xy\colon Fxy\}$」にとり，全体を定義によって展開すると，途法もない〔言明〕型：

$$(x)(y)(z)(Fxz\,.\,Fyz\,.\supset.\,x=y)\equiv$$
$$(x)((\exists y)(z)((\exists w)(Fzw\,.\,w=x)\equiv.\,z=y)\equiv(\exists y)(Fyx\,.\,y=y))$$

が現われる．(i) は，純粋の量化と同一性の図式的表示から仮クラスと関係の図式的表示への翻訳によって，簡潔さと直観性とを著しく増すところの無数の法則のうちのひとつである．他の例は，ブール代数のよく知られた法則，たとえば：

$$^-(\alpha\cap\beta)=\bar{\alpha}\cup\bar{\beta},\qquad \alpha\cap\beta\subseteq\alpha\subseteq\alpha\cup\gamma,\qquad \Lambda\subseteq\alpha\subseteq\mho$$

と，関係の代数の次の法則：

$$R``(\alpha\cup\beta)=R``\alpha\cup R``\beta,\qquad {}^{\smile}\breve{R}=R,$$
$$R``\alpha\subseteq\alpha\,.\equiv.\,\breve{R}``\bar{\alpha}\subseteq\bar{\alpha},\qquad R\subseteq R``\mho\times\breve{R}``\mho,$$
$$Q|(R|S)=(Q|R)|S,\qquad R|I=I|R=R,$$
$$^{\smile}(Q|R)=\breve{R}|\breve{Q},\qquad (Q|R)``\alpha=Q``(R``\alpha),$$

R が推移的かつ対称的である $\supset$ R は反射的である，

R が非対称的である $\supset$ R は非反射的である

である．なん世紀このかた，関係やクラスあるいは属性というような対象を仮定する主要な動機は，たしかにこの種の便利さであった．そして，この種の便利さは，究極的にはそのような対象をまったく仮定しない仮理論によってもえられることを，われわれは，いまや理解している．

しかし，そのような対象を仮定するためのそれ以上のいくつかの論点，仮理論によってはまかなえないいくつかの論点，もある．いま，それらに向おう．

II. 実クラス

4. 実在，外延性，および個体

クラスと関係の仮理論は，量化の変項の値としてクラスや関係を仮定しない．「ϵ」の右側の位置，あるいは，関係帰属の中央の位置に考えられていた表現は，きまってクラス抽象体と関係抽象体(あるいは，それらの省略と型としての表示)であった；それらはけっして変項ではなかった．いったん，クラスと関係を還元できずに量化の変項の値として認めると，またそのときにのみ，われわれは，それらを実在の対象として認めるように拘束されるのである．ある理論の量化の変項の値の範囲が，その理論の領域(universe)である．

変項の値として，ある理論の領域のうちに紛れもなくクラスを認めることによって，われわれは，その領域のうちの残余の対象についてその理論で語りうる事柄を，しばしば，きわだって増すことができる．こういった意味でのよい例を提供するのが，親による祖先の定義である．例を簡単にするために，「祖先」(ancestor)という語を，各自を自分自身の祖先に数えるという範囲で，ほんのすこし拡張しよう．すると，y の祖先は，クラスとして，次の二つの条件：y はそのクラスのメンバーであるという**初期条件**(*initial condition*)と，メンバーのすべての親はメンバーであるという**閉包条件**(*closure condition*)，とをみたす．そのうえ，y の祖先たちは最小のそのようなクラスを構成し，すべてのそのようなクラスの共通のメンバーである．そこで，「x が y の祖先である」を，その初期条件と閉包条件を満足するすべてのクラスに x が属することをいうものとして，それゆえ，

$$(z)(y \in z\,.\,(u)(w)(w \in z\,.\,u \text{ は } w \text{ の親である} \,.\!\supset\!.\, u \in z)\,.\!\supset\!.\, x \in z)$$ [1]

をいうものとして説明できる．述語「の親である」と真理関数および量化の装置は与えられているが，クラス・メンバー性の述語「ϵ」とクラス z の上に量化する権利は与えられていないならば，「x が y の祖先である」を表現するこの手段を，われわれは奪われることになろう．

クラスの上に量化するそれ以外の動機は，IV章において数との関連で現われるであろう．同様に，関係の上に量化する動機も存在する；しかし，関係のことは，暫く忘れることにしよう．

1　この構成は，Frege に負うものであるが，§§11, 15 においてさらに検討するであろう．

クラスを実在として認めるというこの段階を経ると，もはや，「ϵ」を複合的な「$y \epsilon \{x: Fx\}$」の単なる部分として定義することに安んずるわけにはいかない；なぜなら，量化可能な「z」をもつ「$y \epsilon z$」もまた必要になるからである．われわれは，「ϵ」を，むしろ，原初的な二座述語として受けいれねばならない．

このように「ϵ」を，いったん，原初的として受けいれると，さらに，「ϵ」の後に量化可能な変項を使う権利以上のものをわれわれは獲得する；クラスが，それ自身，それ以上のクラスのメンバーとなることを肯定して，「ϵ」の左側へクラスを書きだす権利をも獲得するのである．なぜなら，クラスが変項の値とみなされうるならば，とくに「$y \epsilon z$」の「y」も，「z」がそうであるのと同様に，クラスに言及してよいからである．クラスに対してはあるスタイルの量化可能な変項を，そして，個体に対しては別のスタイルの変項を採用し，「ϵ」の後には前のスタイルのみを，「ϵ」の前には後のスタイルのみを認めることによって，より以上に獲得したといまいったものを事実棄てさることもできたであろう．しかし，後の諸章でふんだんに例示されるように，クラスをそれ以上のクラスのメンバーとして受けいれるならば，数および他の数学的対象について語りうる事柄がきわだってふえる；それは，最初に個体のクラスの上での量化を受けいれたのとほぼおなじくらい，さし迫って必要とされることなのである．それゆえ，単一のスタイルの変項「x」，「y」，「z」，… と，原初的述語「ϵ」とを続けて用い，「$y \epsilon z$」を，「y」および「z」の値としての個体とクラスとに対して等しく有意味なものとして受けいれることにしよう．

すると，ただちに，z が個体の場合，「$y \epsilon z$」をどのように解釈するかという疑問が生ずる．最初に心に浮び，文献において共通に採用されている便法というのは，そのような場合，「$y \epsilon z$」はすべての y に対して単に偽であるというのである；個体はメンバーをもっていない．だが，これから二ページにわたって見るように，はるかに都合のいい，これとは異なる便法がある．

いま，「ϵ」は原初的述語として考えられねばならないのであるから，われわれはそれを支配するどのような公理を採用すべきかを考えねばならない．なんらかの形でたしかに必要とされるであろうようなひとつの公理は，確定性(*Bestimmtheit*，または，definiteness)の公理としても知られている，**外延性**(*extensionality*)の公理である：そのメンバーがおなじであるクラスは，おなじである．ひとつの自然な表現法は：

$$(x)(x \epsilon y . \equiv . x \epsilon z) \supset . y = z$$

である，ここの「$y=z$」は，「ϵ」を唯一の原初的述語として，§1の(i)のプランに従って

定義されたものと考えてよい；かくて，

$$\text{(i)} \qquad (x)(x \in y \,.\!\equiv.\, x \in z : y \in x \,.\!\equiv.\, z \in x)$$

の省略と考えてよい．定義の問題は，三ページ後で，再び論ずるであろう．その間，次のやっかいな点をよく考えてみよう；もしyとzがメンバーをもたなければ，そのときには，われわれが現にもっているような外延性の法則によると，$y=z$である．これは，メンバーをもたない存在(memberless entity)がひとつしかないことを意味する．もしそれが空クラスならば，個体はメンバーをもたぬものではない；もし，個体がメンバーをもたず，そして，個体がひとつでも存在するならば，個体はひとつしかなく，そして空クラスは存在しない．

外延性の法則にもうひとつの条件「$(\exists x)(x \in y)$」を挿入して，この帰結を避けることはできる．だが，そのとき，その法則が失わずにもっていなければならぬひとつのケースを，われわれは失ってしまうであろう；なぜなら，われわれは，やはり，空クラス(*class*)はひとつしかないことを言いたいからである．あきらかに外延性の法則を支配するそれ以上の条件として必要なのは，y(とz)のメンバーが存在するということではなく，yとzが個体であるよりはむしろクラスであるということにほかならない．だが，これはどのように書き表わさるべきであろうか．

もし，異なるスタイルの変項で個体とクラスの上での量化を行なうならば，これは問題ではなかろう．(一ページ前の一時の衝動に反して)二つのスタイルの変項のいずれをも「$\in$」の前に許しているときでも，この問題のためには異なるスタイルの変項で量化を行なうことを選ぶこともできよう．あるいは，単一のスタイルの変項を固守するが，「$\in$」に加えて，一座述語「個体である」(または「クラスである」)を原初的述語として採用することもできよう．附加的な述語の採用は，それが基礎になっている論理を乱さずにおくという点で，二つのスタイルの量化の変項を認めるのよりも，理論上，たぶん好ましいであろう．次のように随意に選択することは，つねに，有効である：n箇の異なるスタイルの変項を採用するかわりに，異なるスタイルの変項がそのために取っておかれていた領域のうち，ひとつを除いてそのおのおのに対してひとつずつ，$n-1$箇の一座述語を加えることがつねにできる．除かれたひとつは，それ以外のものの否定によって定義できるので節約される．(より詳しくは，§§33, 37を見よ.)

しかしながら，個体性という一箇の原初的述語，あるいはクラス性のそれを加えるということすら，心ならずもエレガンスを犠牲にしている，そして，幸いにも，それを避ける

ことができる．というのは，個体がメンバーをもたないものと見なされる必要はないからである．そもそも，「$x \in y$」は，クラス y に対してのみわれわれの興味をひく；「$x \in y$」に対してわれわれがすでにいだいている概念のうちで考慮に値するのは，そのように y がクラスであるケースのみである．もし，スムーズな体系化のために，それ以外のケースにも意味を与えることが適当だと思うならば，最大限スムーズにするような意味を与えよう．最初のプランはそれ以外のすべてのケースを偽とみなすように意味を与えるというのであったが，それはスムーズでないことが分っている．そのかわり，y が個体であるとき，$x=y$ であるかまたは $x \neq y$ であるかに応じて，「$x \in y$」を真または偽ときめよう．すると，個体 y および z に外延性の法則を適用する問題は消えてしまう；y と z が個体であり，個体の前の「$\in$」が「$=$」の意味を与えられている場合，この法則は真になる．

しかし，y が個体で，z が y の単一クラスであるならばどうか？ 個体の前の「$\in$」に関するわれわれの新しい解釈によれば，「$x \in y$」は，x が個体 y であるとき，かつそのときにかぎって，真となる；だが，「$x \in z$」もまた，x が個体 y であるとき，かつそのときにかぎって，真である；したがって，$(x)(x \in y . \equiv . x \in z)$，そしてそれゆえ，$y=z$．この結果は，$y$ が個体であり z がクラスなので，一見，受けいれられないようにみえる．しかし，実際には，それは無害な結果である；個体，その単一クラス，その単一クラスの単一クラス，等々，を，ひとつの，そして同一のものとみなすことによって，クラス理論の効用はなにひとつそこなわれない．まったくのところ，「個体」を「非クラス」として説明することをやめるという範囲でわれわれの用語を調整するのが，いまや賢明である；それらを個体たらしめるものは，非クラスではなく，それらの単一クラスとの同一性(あるいは，おなじことになるが，それら自身の唯一のメンバーとの同一性)である，ということにしよう．個体の前の「$\in$」に「$=$」の意味を与えるとわれわれがきめるまでは，個体は非クラスとして考えられていたものである；いまや，それらはクラスとみなされるのがもっともよい．あらゆるものは，クラスとみなされるようになる；それでも，個体は自分自身の唯一のメンバーであるという点で，他のクラスから区別されている．

なぜなら，y が個体でないとき，y とその単一クラスとの区別を，私はけっしてあいまいにしてはいないからである．もし，y がいくつかのメンバーから成るクラスであるか，あるいは，メンバーをもたぬクラスであるならば，たしかに，y は，一箇のメンバーをもっているその単一クラスから区別されねばならない．もし，y がいくつかのメンバーから成るクラスの単一クラスであるか，あるいは，メンバーをもたぬクラスの単一クラスである

ならば，y は y の単一クラスから区別されねばならない．y の一箇のメンバーは，前文によって，y の単一クラスのひとつのメンバーとは異なるからである．このように，一般に，クラスとその単一クラスとの区別は不可欠であるし，私はひきつづきそれを重んずる．しかし，個体とその単一クラスとの区別は，判然とした目的になんら役だつものではないし，外延性の法則に附随していた厄介は，その区別だけをすてさえすれば解決されうるのである．

「$x=\{x\}$」の意味でも，また別の意味でも，個体が存在すると主張する必要はない．もし，そのようなものが存在するとしても，「$x=\{x\}$」が個体を特徴づけるものであると単にきるめだけで，現在でも，また，集合論の高次の範囲においても，われわれの目的には十分である．フレンケルがツェルメロの集合論に関して認めているように，すべての形式上の要求は，彼がそうよんでいるところの，次のような純粋な(*pure*)クラスだけが存在する領域でみたされうるのである：Λ，$\{\Lambda\}$，$\{\Lambda, \{\Lambda\}\}$ と，このような材料から構成されたそれ以上のクラスだけであって，いかなる意味での個体も存在しない[2]．それでもなお，集合論を純粋数学以外へ応用したい人は，どんな種類の奇妙なものをもそのクラスのメンバーとして要求してもよい．個体についての私の表現法は，そのようなどんな希望をも，あらゆるものをある意味でクラスとする形式上の利点と和解させるようにもくろまれている．

これらの形式上の利点とは，いままでのところでは，個体性の原初的述語の消去と外延性公理の単純化とである．それ以上の利点は，§§5, 7, 8, 38 に散在しているのに気づかれるであろう．いま注目すべきもうひとつの利点は，われわれの同一性の定義を単純化できることである：「$y=z$」を(i)のように説明するかわりに，

$$「y = z」は「(x)(x \in y \,.\!\equiv\!.\, x \in z)」を表わす$$

と定義してもよい．なぜなら，すでに 2.7 の「$\alpha=\beta$」に対して考察したこの定義様式は，個体をその単一クラスと同一視したいま，個体に対してもあきらかに正しいものとなる．

この定義に番号をつけるかわりに，この定義が 2.7 に含まれるようにするひとつの便法を採用しよう．その便法というのは，定義 2.1—2.9 はやはり全部保存し，「α」と「β」は，そこでも，またこれからも，クラス抽象体だけでなく，クラス抽象体と普通の自由変項との区別なくそれらの現われる場所を表わす型文字と解する，というのである．「α」がクラ

2　Fraenkel, *Einleitung*, 355 ページ以下．私の体系 NF(以下の§40)について，もし，それが無矛盾なら，個体の存在を肯定もしくは否定する公理，「$(\exists x)(x=\{x\})$」もしくは「$(x)(x\neq\{x\})$」をつけ加えても，それが無矛盾であることを，Scott が証明した．

ス抽象体を表わすと考えられるとき，定義2.2—2.7 のうちのどの「$x \in \alpha$」も，やはり，2.1で定義されたものとみなす；「α」がむしろ「y」を表わすと考えられるときは，これらのおなじ定義 2.2—2.7 の「$x \in \alpha$」は，むしろ原初的述語「ϵ」を含んでいる．このように，私は，記号「ϵ」を二つのひじょうに違った資格で区別せずに用いるであろう．このやり方は，われわれが見るであろうように，あるスムーズなテクニックに役だつ；そしてどんなあいまいさも，「ϵ」の後に何がくるか——変項か抽象体か——によって，文脈上解決される．

2.8 と 2.9 の「=」は，その定義当時では，出所のとくにきまっていないところの，それに先だつ備品，と考えられていた．われわれの新しい態度の下では，その「=」は 2.7 に由来するものと解さるべきである．

もし純粋主義者として 2.1 より 2.1″ を好むならば，2.1″ の「=」に対してもまったくおなじである；だが，2.7 は必然的に 2.1″ の後にくるので，ここではあきらかな循環を避けるステップが必要である．もちろん，単に，展開した形式の 2.1″：

「$y \in \{x\colon Fx\}$」は「$(\exists z)((w)(w \in z\,.\equiv .\, w \in y)\,.\,(\exists x)((w)(w \in x\,.\equiv .\, w \in z)\,.\,Fx))$」を表わす

で始めれば，解決される．しかし，われわれがそうするように，むしろ 2.1 で考えれば，このような細目は消えてしまう．

「$y=z$」は，(i)としてではななく，「$(x)(x \in y\,.\equiv .\, x \in z)$」として定義されるのであるから，これまで定式化された外延性公理はその内容を失い，書きかえられねばならない．省略ということを離れると，それが実際に意味していたものは，

$$(x)(x \in y\,.\equiv .\, x \in z) \supset (x)(x \in y\,.\equiv .\, x \in z : y \in x\,.\equiv .\, z \in x),$$

あるいは，これと論理的に等値な，

$$(x)(x \in y\,.\equiv .\, x \in z) \supset (w)(y \in w\,.\equiv .\, z \in w)$$

であった．この目的のための公理としては，もっと単純な式：

$$(x)(x \in y\,.\equiv .\, x \in z)\,.\, y \in w\,.\supset .\, z \in w$$

であきらかに十分である，「$(x)(x \in y\,.\equiv .\, x \in z)$」は，「$y$」と「$z$」において対称的であるから．すると，省略を別にすれば，希望通りの**外延性公理**(*axiom of extensionality*)がここにある．2.7 によれば，これは次のように省略される：

4.1 **公理** $y = z \,.\, y \in w \,.\supset.\, z \in w.$

この公理において，同一性の代入可能性(§1)の一例が見られる．この公理が必要なのは，(i)と違って，「$(x)(x \in y \,.\equiv.\, x \in z)$」が，論理だけで代入可能性を保証するのに，それ自体では，不十分だからである．

5. 実クラスに囲まれた仮クラス

元来，2.7 は「＝」をクラス抽象体のあいだにだけ定義していた．いま，「α」と「β」がクラス抽象体と自由変項のどちらをも表わすとした結果，すでに注意したように，2.7 は変項のあいだでも「＝」を定義することとなった．そして，われわれは，事実，それ以上のことをしたのである：2.7 は，変項と抽象体のあいだでも「＝」を定義することとなった．「α」が変項を表わすにせよ，抽象体を表わすにせよ，2.7 と 2.1 によって，

5.1 $$\alpha = \{x: Fx\} \,.\equiv (x)(x \in \alpha \,.\equiv Fx).$$

「Fx」を，とくに「$x \in \alpha$」にとると，5.1 から，

5.2 $$\alpha = \{x: x \in \alpha\}$$

をうる．これが，次の形式：

$$\{z: Fz\} = \{x: x \in \{z: Fz\}\}$$

のすべての文を定理として含み，さらに，「$y = \{x: x \in y\}$」を含むことに注意されたい．この最後の y は，どんなものでも，個体でさえ，あってもよい；個体を自分自身のメンバーと考えることによって，§4 でえられた単純性のもうひとつの例がここにあるのである．

5.1 では，一方では，その後に続く変項「y」をもつ原初的な「$\in$」と，他方では，その後に続く仮クラス理論の抽象体「$\{x: Fx\}$」とともに定義された「$\in$」とが結びつけられている；われわれは，いまや，その「y」と「$\{x: Fx\}$」とを同一視して，欲するときには，$(x)(x \in y \,.\equiv Fx)$ という．仮理論と実理論がこのように融けあっている以上，われわれの抽象の記法「$\{x: Fx\}$」について，仮〔のもの〕といいつづけるのは，おそらく，誤解を招くであろう．

この融合が，『新論理学の意味』(*O Sentido*)とも，ベルナイスの1958年の手続きとも異なる点である．ベルナイスにとっては，$\{x: Fx\}$ はいつでも仮〔クラス〕であり，おなじメンバーをもつ集合が存在するときでさえ，実〔クラス〕でない(§2 参照)．他方，私にとっ

ては，もしそれが存在するなら，$\{x: Fx\}$ はその集合である．それゆえ，われわれは今後，抽象の記法「$\{x: Fx\}$」について，われわれにとって，仮ではなく，**非関与的**(*non-committal*)である，として語るのがよいであろう：その記法の使用は，ただ単に，クラスの存在に関する(もしそれが存在するならば，その集合性についての)いかなる一般的な仮定をも伴なっていない，のである．

$\{x: Fx\}$ のようなクラスが存在することをとくにいうかどうかは，「Fx」がどんな文を表わすと解釈するか，また，結局，どのような存在公理を採用するときめるか，にかかっている．この後者のテーマは，(「Fx」と図式化された)あらゆる定式可能な条件に対して，そのメンバーが，ちょうどその条件を満足するものとなるようなクラス y を保証している一箇の公理型(axiom schema)：

(i) $$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv Fx)$$

によって，満足のいくように処理できると見えるかもしれない．これが，そのもっとも素朴な形式における，**抽象**(*abstraction*)，または，**包括化**(*comprehension*)の法則である．それは，5.1 のおかげで，より簡潔に表わされる：

$$(\exists y)(y = \{x: Fx\}),\ \text{すなわち},\ (\exists y)(y = \alpha).$$

いずれにせよ，これは維持できない：これには際限のない反例があり，しかも，それら反例のすべてが，単に量化の論理によって妥当なのである．これら反例のうちでもっとも単純な，序論で**ラッセルの逆理**と記したものは，次のようになる：

5.3 $$\sim(x)(x \in y . \equiv . x \notin x).$$

証明．もし $(x)(x \in y . \equiv . x \notin x)$ なら，$y \in y . \equiv . y \notin y$.

もうひとつは，「$x \in^2 x$」が「$(\exists z)(x \in z \in x)$」の略であるとすると，次のようになる．

5.4 $$\sim(x)(x \in y . \equiv \sim(x \in^2 x)).$$

証明．反対に，

$$(x)(x \in y . \equiv \sim(x \in^2 x)) \qquad [\mathrm{i}]$$

と仮定しよう．$y \in y \in y . \supset . y \in^2 y$，また [i] によって，$y \notin y . \supset . y \in^2 y$ であるから，$y \in^2 y$ が帰結する．そこで，$y \in x \in y$ なるあるもの x が存在する．しかるに，このとき，[i] に反して，$x \in^2 x \in y$.

5.3 と 5.4 がわれわれに語るのは，$\{x: x \notin x\}$ と $\{x: \sim(x \in^2 x)\}$ とが存在しない，という

ことである．同様に，$\{x: \sim(x \in^3 x)\}$，$\{x: \sim(x \in^4 x)\}$，等々，の存在を反証できる[1]．

これらの例から，たぶん，否定を伴なっている循環的パターン「$x \in z_1 \in z_2 \in \ldots \in x$」が，(i)に対する例外にとって本質的である，と想像されよう．そうではない．反例は：

$$(\exists z)((w)(w \in z . \equiv . w \in x) . z \notin x)$$

である．なぜなら，その原子的構成要素「$w \in z$」，「$w \in x$」，「$z \in x$」が，なんらかの循環を呈するように結びつけられることはできない；しかも，全体は2.7によって「$(\exists z)(z=x . z \notin x)$」に帰着し，これは結局5.3の「$x \notin x$」に等しいからである．

おなじたちのもうひとつの逆理はミリマノフ(Mirimanoff)の逆理であるが，これは，(i)の y をすべての**基底的**(*grounded*)クラスのクラスと考えることから生ずる：基底的クラスとは，それに対して $\ldots \in z_2 \in z_1 \in x$ なるいかなる無限の系列 $z_1, z_2, \ldots$ も存在しないようなクラス x である．なぜなら，もし y 自身が基底的であるならば，$y \in y$，それゆえ，y の基底性に反して，$\ldots \in y \in y \in y$．他方，もし y が基底的でないならば，$\ldots \in z_2 \in z_1 \in y$ なる $z_1, z_2, \ldots$ が存在する；だが，このとき，こんどは，z_1 が基底的でないが，これは「$z_1 \in y$」に反する．

その否定が論理的に妥当でないような(i)の個々の例のおのおのを公理とみなす，と単に規定することによって，十分に(i)を制限できるであろうか？　このやり方には，論理的妥当性を反証するための一般的なテクニックが，論理的妥当性を証明することに対するのと同様，存在しない，という反論がでよう．この反論はたいして重要でない．だが，このやり方を反故にしてしまうような反論もある：つまり，このように特定化された諸公理は，個々には無矛盾だが，集まると矛盾的となるのである．

そこで，**分出**(*Aussonderung*)の原理を考えよう[2]：

(ii) $$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv . x \in z . Gx),$$

あるいは，より簡潔に：

$$(\exists y)(y = z \cap \{x: Gx\}),\quad \text{すなわち，}\quad (\exists y)(y = z \cap \alpha).$$

これは，(i)の特殊化で，「Fx」が「$x \in z$」を含意すると解釈される場合の(i)のケースをちょうど含んでいる．さて，そのようなすべてのケースは，いかなる論理的矛盾にも陥る

1 *Mathematical Logic*, §24. §2の註4で説明したのとおなじような短縮「ϵ^2」，「ϵ^3」などは，番号のついた定義という儀式を正当とするとは思われない．

2 Cantor(1899)とZermelo(1908)から．後の§37を見よ．

ことなしに，すべての z に対して，同時に真と仮定できる．(証明：すべての x と y に対して，「$x \in y$」をトリヴィアルに偽と解釈しなおすと，(ii)は「G」にかかわらずトリヴィアルに真となる．) さらに，また，(i)の別ケース：

(iii)　$$(\exists y)(x)(x \in y \,.\!\equiv.\, x = x)$$

は，それ単独では，真と仮定できる；事実，それは，「$(\exists y)(x)(x \in y)$」あるいは「$(\exists y)(y = \mho)$」に帰着する．しかし，(ii)と(iii)の組合せは矛盾に導く．(ii)の z を(iii)の y に，かくして $\mho$ に，とれば，「$x \in z$」を(ii)から落すことができて，残るものは完全に(i)自身の意味をもつからである．

ツェルメロの理論は(ii)を受けいれ，それゆえ(iii)を拒否する．私の『新基礎』(New foundations) の理論は(iii)を受けいれ，かくして(ii)に例外を設けねばならない．(以下の§§ 38, 40 を見よ．) さらに，他の理論は(iii)を拒否し，さらに(ii)に例外を設ける．多くの根本的に等値でない集合論が提出されてきたのは，(i)の個々別々には主張できる諸ケースがこのように相互に相容れないためである；はっきり最善だといえるものは存在しない．

包括化公理(comprehension axioms)——(i)の諸ケース——に関する私の方策は，そのような公理を，ひとつずつ必要に応じて，ふしょうぶしょう採用することとなろう．§7では，メンバーが三箇以下のすべてのクラスを仮定するであろう．§13では，一般に有限クラスを仮定するであろうが，それ以上には出ない．後の章では，それ以上のクラスをいろいろ仮定することから生ずる帰結が考量されよう．だが，この章では，(i)のどのケースも，どんな包括化公理も，私は仮定しないであろう．

この存在論的態度をＩ章のそれと比較しよう．Ｉ章では，実際にクラスが存在するか，という問いはおきなかった．Ｉ章に関するかぎり，クラスの話は，単なる話し方として説明されてしまい，その話し方は，その理論の特殊な主題が何であるにせよ，その主題に対するそれ自身の原初的述語をもつあるひとつの特殊な理論の上に，定義としてそえられたものであった．さて，この章においても，われわれは，やはり，クラスの存在仮定を差し控えてはいるが，いまや，その問いがきわめてはっきり現われているという点が違っている：いまや，われわれは，「$\in$」を原初的述語としてもち，しかも，それは，クラスが存在しまた数多く存在するのでなければ，とるにたりぬぴんとこない述語である．定理の多くさえもが，存在量化子よりもむしろ普遍量化子によって支配されているという理由で，存在についての公理や前提なしに証明されうるが，もしクラスが排除されるならば，それら定理は潜在的な内容や興味をすべて失ってしまうであろう．いま，われわれは，たしか

にそこにはクラスが存在すると思っているが，まさしくどんなクラスがあるか，をいう準備はまだ整っていない.

とにかく，われわれは，少なくともひとつのクラスが存在する，ということにはかかりあいになっているのだ，という議論は可能である．なぜなら，われわれは量化の古典的論理を仮定しており，この論理は，よく知られているように，(「$(\exists x)(Fx \supset Fx)$」およびその同類を妥当とみなすので)少なくともひとつのものが存在することを仮定している；しかも，われわれの個体解釈によれば，いかなるものもクラスであり，個体は自分自身から成るクラスなのであるから.

技術上要求されるその最小限以上に存在を仮定する，ということをさし迫って必要とする機会は，私がひきつづき利用するであろう非関与的なクラス抽象という考え方のおかげで，予期されるよりも，いくぶん減じている．なぜなら，クラス抽象の文脈的定義 2.1 は，$\{x: Fx\}$ のようなどんなクラスの存在をも仮定する必要なしに，$\{x: Fx\}$ のメンバーとなることについて自由に，時には真実にさえ語るのを許すからである．このようにして進んで行っても，その手続きが定義 2.1 にだけ依存しどの仮定にも依存しないので，われわれ自身を論理的矛盾に捲きこむ危険はない．ラッセルの逆理の下にあるクラス $\{x: x \notin x\}$ についても，そのメンバーとなることを肯定または否定する範囲では，語ることさえできる；事実，2.1 によって，

$$y \in \{x: x \notin x\} . \equiv . y \notin y.$$

もし，ここで「y」に「$\{x: x \notin x\}$」を代入することが許されるなら，われわれは矛盾に陥るであろう；だが，これまでのところ，変項にクラス抽象体を代入することは許されていないし，「$\in$」の左側のクラス抽象体を説明するいかなる定義もこれまでのところでは採用されていない.

しかしながら，この後の方のギャップは，いま，うめられるであろう．そのうめ方は，5.1 から明らかである.

5.5 「$\{x: Fx\} \in \beta$」は「$(\exists y)(y = \{x: Fx\} . y \in \beta)$」を表わす.

$\{x: Fx\}$ のメンバーとなることを肯定することは，$\{x: Fx\}$ が存在することを暗示することではない．しかし，$\{x: Fx\}$ がメンバーとなることを肯定することは，5.5 によって，はっきりと，$\{x: Fx\}$ が存在すること：$(\exists y)(y = \{x: Fx\})$，を含意しうる.

2.1 と 5.5 は一緒になって，自由変項が現われうるすべての場所にクラス抽象体が現われ

る場合を説明している．なぜなら，それらは「ϵ」のどちら側にも現われるクラス抽象体を説明しており，「ϵ」はわれわれの唯一の原初的述語であるから．それゆえ，われわれの〔言明〕型は，今後，「Fy」とおなじように自由に「$F\alpha$」および「$F\{x:Gx\}$」を認めることができる．「Fy」は(定義を除いて)「ϵ」，変項，量化子および真理関数から作られた任意の文を表わす；「$F\alpha$」または「$F\{x:Gx\}$」は，「y」のかわりに「α」または「$\{x:Gx\}$」をもつおなじ文を表わす．

だが，推論規則として変項にクラス抽象体を自由に代入してよいと速断しないようにしよう．そのような代入は，「ϵ」の地位を，「$y \epsilon z$」におけるような原初的述語の地位から，「$y \epsilon \{x:Fx\}$」または「$\{x:Fx\} \epsilon \beta$」におけるような文脈的に定義された小片の地位へ変えてしまう：しかも，この二種の「ϵ」は，一見したところでは，単なる偶然的な同音異義語なのである．われわれが記法を意図的に選んでいるということは，抽象体を変項に代入することによる来るべき推論を，少なくともある範囲では，たしかにあてにしている；だが，こういった趣旨のどの規則も，定義とそれに先立つ仮定とに照らして正当化されねばならない．それが，次節の主題である．

6. 同一性と代入

同一性の代入可能性の法則「$x=y \,.\, Fx \,.\!\supset Fy$」は，現在の体系において次のようにして取り戻されうる．4.1 によって，$x=y \,.\, x \epsilon z \,.\!\supset\!.\, y \epsilon z$，および $y=x \,.\, y \epsilon z \,.\!\supset\!.\, x \epsilon z$．しかるに，2.7 によって，$x=y \,.\!\equiv\!.\, y=x$．したがって，

$$x = y \,.\!\supset\!:\, x \epsilon z \,.\!\equiv\!.\, y \epsilon z.$$

かくして，2.7 により，

$$x = y \,.\!\equiv (z)(z \epsilon x \,.\!\equiv\!.\, z \epsilon y : x \epsilon z \,.\!\equiv\!.\, y \epsilon z).$$

これから，§1 の (i) との関連で見た議論によって，$x=y \,.\, Fx \,.\!\supset Fy$ を結論する．

さらに，2.7 により，$y=y$．§1 でいわれたように，これら二つの結果から同一性の全法則が帰結する．とくに，いま，こう書きとめてよい：

6.1　$$Fy \equiv (\exists x)(x = y \,.\, Fx),$$

「$x=y \,.\, Fx \,.\!\supset Fy$」と「$y=y$」とからのこれの導出は，§1 ではっきり見たからである．それの系として，さらに，その双対：

6.2　$$Fy \equiv (x)(x = y \,.\!\supset Fx)$$

をうる．なぜなら，6.1 に代入して，

$$\begin{aligned} \sim Fy &\equiv (\exists x)(x = y \,.\, \sim Fx) \\ &\equiv \sim(x)(x = y \,.\!\supset Fx). \end{aligned}$$

同一性の全法則が生ずるというとき，それら全法則が，ギリシャ文字や抽象体ではなく，6.1 や 6.2 のように，真正の変項で言い表わされているものと想定されている．前者〔ギリシャ文字や抽象体〕を用いると，ただちに，うまくいかなくなる．たとえば，「$(\exists y)(y=z)$」は「$z=z$」から生ずる同一性の妥当な法則である；にもかかわらず，α が $\{x: x \notin x\}$ のときは，5.3 により，すべての y に対して $y \neq \alpha$ であるから，「$(\exists y)(y=\alpha)$」は成りたたない．そのことからして，「y」を「α」に変えると，6.1 や 6.2 さえ成立しえない；なぜなら，もし $\sim(\exists x)(x=\alpha)$ なら，まさに，$\sim(\exists x)(x=\alpha \,.\, Fx)$ かつ $(x)(x=\alpha \,.\!\supset Fx)$ であるが，一方 $\sim F\alpha$ と $F\alpha$ とは，たしかに，ともには成りたたないからである．

「y」を「α」にかえた 6.1 の次の特殊ケースはえられる．

6.3 $$\alpha \in \beta \,.\!\equiv (\exists x)(x = \alpha \,.\, x \in \beta).$$

証明は，「α」が抽象体か変項かを表わすのに応じて，5.5 または 6.1 による．

「$(\exists y)(y=\alpha)$」と，「y」を「α」にかえた 6.1 と 6.2 とが成立しないということは，抽象体（または，ギリシャ文字）の変項への代入が一般に正当化できる推論様式ではないということを十分例証している．同一性の多くの法則は，6.1 や 6.2 と異なり，そのような代入の下で，たまたま成りたつこともある；だが，それらが成立するということを示すには，代入以上のものを必要とする．たとえば，「$x=x$」と「$x=y \,.\!\equiv.\, y=x$」から，ただちに，

6.4 $$\alpha = \alpha,$$

6.5 $$\alpha = \beta \,.\!\equiv.\, \beta = \alpha$$

を結論する権利はない．だが，これら後者は，2.7 の下では，次の：

$$(x)(x \in \alpha \,.\!\equiv.\, x \in \alpha),$$

$$(x)(x \in \alpha \,.\!\equiv.\, x \in \beta) \equiv (x)(x \in \beta \,.\!\equiv.\, x \in \alpha)$$

の単なる省略であるが，これら二つの式が量化子と真理関数の純粋な論理によって真であることを見れば，ただちに証明**できる**．「$\alpha=\beta \,.\, \beta=\gamma \,.\!\supset.\, \alpha=\gamma$」もおなじようにして証明できよう；だがしかし，これは以下の 6.7 にも含まれている．

また，同一性の代入可能性の法則は，どちらかの，または両方の変項のかわりに抽象体

が現われる場合にも成立する，かくして：

6.6 $$\alpha = \beta \,.\, F\alpha \,.\!\supset F\beta,$$

だが，これはあきらかに次のようにして証明されなければならない．まず，「$F\alpha$」と「$F\beta$」がただひとつの場所で異なっている文を表わすケースを考える．「α」がひとつ現われるその直接の文脈は，「$\gamma \in \alpha$」(部分ケース１)，または「$\alpha \in \gamma$」(部分ケース２) のどちらかである；というのは，今まであげられているどの定義も略さずに書き出されたものと想定してよいからである．

部分ケース１:「$G\alpha$」は，「$F\alpha$」によって表わされる文の中で「$\gamma \in \alpha$」の現われる場所に「$(\exists x)(x=\gamma \,.\, x \in \alpha)$」を代入することによって形成される文を表わすものとする．6.3 と双条件の代入可能性により，$F\alpha \equiv G\alpha$.

部分ケース２:「$G\alpha$」は，「$F\alpha$」によって表わされる文の中で「$\alpha \in \gamma$」の現われる場所に：

$$(\exists z)((x)(x \in z \,.\!\equiv.\, x \in \alpha) \,.\, z \in \gamma)$$

を代入することによって形成される文を表わすものとする．そこで，2.7 と 6.3 および双条件の代入可能性により，$F\alpha \equiv G\alpha$.

どちらの部分ケースでも：$F\alpha \equiv G\alpha$. 同様に，$F\beta \equiv G\beta$. しかるに，「$G\alpha$」および「$G\beta$」によって表わされる文は，一方が「$x \in \beta$」を有する所に，他方が「$x \in \alpha$」をもつことを除いては，等しい；したがって，双条件の代入可能性により，

$$(x)(x \in \alpha \,.\!\equiv.\, x \in \beta) \,.\, G\alpha \,.\!\supset G\beta.$$

つまり，2.7 により，$\alpha = \beta \,.\, G\alpha \,.\!\supset G\beta$. すなわち，$\alpha = \beta \,.\, F\alpha \,.\!\supset F\beta$.

それゆえ，「$F\alpha$」と「$F\beta$」によって表わされる文がただひとつの場所で異なる場合に対して，6.6 が証明される．つぎに，n 箇の場所への拡張は，§1 の (i) からの議論と同様に論じられる．

6.6 のより有効な変形は：

6.7 $$\alpha = \beta \,.\!\supset.\, F\alpha \equiv F\beta,$$

であるが，これは，6.5 を考慮すると 6.6 から出てくる．

6.4 と 6.6 において，「$x=x$」および「$x=y \,.\, Fx \,.\!\supset Fy$」が，自由変項にギリシャ文字が代入されるときでも成りたつことを見た．ところが，同一性の全法則は，量化理論によ

って「$x=x$」と「$x=y\,.\,Fx\,.\supset Fy$」から生ずる(§1参照). にもかかわらず，同一性の法則のうちには，自由変項にギリシャ文字を代入すると成りたたないものもあることが分っている. これはどうしておこりうるのか？ 答えは，量化理論の演繹ステップそれ自身がギリシャ文字までは及ばない，ということである. ギリシャ文字が，量化された変項の選例(instance)として，いつでも正当化できるとはかぎらないということは，結局，実質的にはわれわれがこれまで論じてきたことである. たとえば，6.1の証明は次のように量化理論を用いていた：

$$y = y\,.\,Fy\,.\supset (\exists x)(x = y\,.\,Fx).$$

「y」のかわりに「α」をいれると，このステップは正当化されないであろう.

一般的にいって，成立しないのはクラス抽象体の変項への代入を表わす〔言明〕型「$(x)Fx \supset F\alpha$」と，その双対「$F\alpha \supset (\exists x)Fx$」とである. これらは，$\alpha$ が存在する，すなわち，$(\exists x)(x=\alpha)$，という趣旨の補助的な包括化前提(comprehension premiss)を条件としてのみ，一般に正当化できる. それゆえ，われわれがそのような前提を大いに必要とするであろう，ことは明らかである.

そのような前提を表わすのに「$(\exists x)(x=\alpha)$」よりも便利な記法は，「$\alpha \in \mho$」である. なぜなら，6.4により，$x=x$，したがって，定義2.1と2.9により，

6.8 $$x \in \mho,$$

をうるが，6.3によって

$$\alpha \in \mho\,.\equiv (\exists x)(x = \alpha\,.\,x \in \mho)$$

なので，これから

6.9 $$\alpha \in \mho\,.\equiv (\exists x)(x = \alpha)$$

を結論できる.

これと5.1とは，$\{x\colon Fx\}$ が存在することを述べる三つの方法を与える：

$$\{x\colon Fx\} \in \mho, \qquad (\exists y)(y = \{x\colon Fx\}), \qquad (\exists y)(x)(x \in y\,.\equiv Fx).$$

そこで，とくに5.3と5.4は，いまや，次のように書きかえられる：

6.10 $$\{x\colon x \notin x\}, \qquad \{x\colon \sim(x \in^2 x)\} \notin \mho.$$ [1]

---

1 「$\alpha, \beta \in \gamma$」については，§2の註4を見よ.

適当に制限された，クラス抽象体の変項への代入に対する〔言明〕型が，その双対とともに，いまや容易に証明される．

6.11 $\alpha \in \mho \,.\, (x)Fx \,.\supset Fa,\qquad \alpha \in \mho \,.\, F\alpha \,.\supset (\exists x)Fx.$

証明．仮説と 6.9 により，$y=\alpha$ なるあるもの y がある．すると，6.7 により，$Fy \equiv F\alpha$．したがって，$(x)Fx \supset F\alpha$，および $F\alpha \supset (\exists x)Fx$．

「$\alpha \in \beta$」が α の存在を含意することは，すでに注意したが，また，大いに用いられるであろう．

6.12 $\alpha \in \beta \,.\supset.\, \alpha \in \mho.$ **証明**は 6.3, 6.9 による．

より完全には，次式がえられる．

6.13 $\alpha \in \{x: Fx\} \,.\equiv.\, \alpha \in \mho \,.\, F\alpha.$

証明．2.1 により，$(y)(y \in \{x: Fx\} \,.\equiv Fy)$；したがって，6.11 により，

$$\alpha \in \mho \,.\supset\colon \alpha \in \{x: Fx\} \,.\equiv F\alpha.$$

しかるに，また，6.12 により，

$$\alpha \in \{x: Fx\} \,.\supset.\, \alpha \in \mho.$$

そこで，6.13 が真理関数によって結果する．

6.13 の「α」に「y」を代入すると，もちろん，存在を示す文節は 6.8 によって落ちる．残るのは，ちょうど 2.1 である．

ここで，6.8 の双対をつけ加えてもよい．だが，それは，型文字を許す．

6.14 $\alpha \notin \Lambda.$

証明．6.13 と 2.8 により，$\alpha \in \Lambda \,.\equiv.\, \alpha \in \mho \,.\, \alpha \neq \alpha$．したがって，6.4 により，$\alpha \notin \Lambda$．

6.8 と 6.14 とをともに強めることができる，かくて：

6.15 $(x)(x \in \alpha) \equiv.\, \alpha = \mho,\qquad (x)(x \notin \alpha) \equiv.\, \alpha = \Lambda.$

証明．6.8 と 6.14 により，それぞれ，

$$(x)(x \in \alpha) \equiv (x)(x \in \alpha \,.\equiv.\, x \in \mho),$$
$$(x)(x \notin \alpha) \equiv (x)(x \in \alpha \,.\equiv.\, x \in \Lambda),$$

q. e. d. (2.7 参照).

あるいは，6.15 の α を，$\{x: Fx\}$ または $\{x: \sim Fx\}$ にとって，2.1 に注意すれば，

6.16　$(x)Fx \equiv . \{x: Fx\} = \mho . \equiv . \{x: \sim Fx\} = \Lambda.$

「$\alpha \in \mho$」が α の存在を述べるわれわれの手段として現われているのであるから，存在と集合性，および仮クラスと究極クラスとの混同に対する§2の警告がくり返され，強調されねばならない．α の存在とは，$\mho$ のメンバーであることであり，α の集合性とは，なにかあるもののメンバーであることである；そのトリックは，まさに，$\mho$ がなにかであることが知られていない，ということである．もし，本当に，$\mho$ の存在を，すなわち $\mho \in \mho$，を要請するならば，事実，すべてのものが集合となる；存在は集合性に帰する．いやしくも究極クラスなるものが存在するならば，$\mho$ は実在ではない；$\mho \notin \mho$.

もし究極クラスが存在するなら，すなわち，すべてのクラスが集合であるとはかぎらないならば，Fu なるすべてのクラス u（かくして，u が何であるにせよ Fu なるすべての対象 u）のクラス $\{u: Fu\}$ と，単に Fu なるあらゆる集合 u から成るクラス $\hat{u}Fu$ とを，一般に区別することは有益である[2]．後者は前者によって次のように定義できる：

「$\hat{u}Fu$」は「$\{u: (\exists z)(u \in z) . Fu\}$」を表わす．

$\hat{u}Fu$ と $\{u: Fu\}$ とが異なるとき，その相違の生ずるのは，Fx なるある究極クラス x が存在するからである．このとき，$x \notin \hat{u}Fu$ であるが，にもかかわらず $x \in \{u: Fu\}$ であって，$\hat{u}Fu \in \mho$ なることは十分ありうるが，($(y)(x \notin y)$ なので) $\{u: Fu\} \notin \mho$.（事実，「$\hat{u}Fu \in \mho$」は，究極クラスを認める理論に対して，積極的に公理型として推奨される[3].）いったん，$\{u: Fu\}$ と $\hat{u}Fu$ のこの区別が現われるからには，$\{u: u=x\}$，$\{u: u=u\}$，等々，のわれわれ自身の意味での $\{x\}$，$\mho$，等々，と，$\hat{u}(u=x)$，$\hat{u}(u=u)$，等々，の意味での，たとえば，ιx，V，等々，とを混同しないように注意しなければならない．もし x がひとつの究極クラスであれば，

2　記法「$\hat{u}Fu$」と「$\{u: Fu\}$」の相違は，いままで，この区別を反映するようにきめられてはいなかった．一方の記法は，Whitehead and Russell にさかのぼる；もう一方はより最近のもので，次第に流行しつつある．たまたま，私は *Mathematical Logic* において，古い「$\hat{u}Fu$」を用いた；そしてこれに「Fu なるすべての集合のクラス」という意味を与えたが，その理由は，単に，関与的な(committal)抽象がその意味をもたなければならぬのと，非関与的な抽象が心に浮かばなかったからにすぎない．たまたま，Bernays(1958)は，（まったく似た意味で）むしろ記法「$\{u: Fu\}$」を好み，なんら関連する理由なしに，彼の抽象の用法を仮クラスに限定した．いまでは，内容の偶然的な相違を銘記するために，記法のこの偶然的相違を利用するのが便利となる．この新しい区別は，（集合とクラスとのあいだのそれのように）究極クラスをもたない体系にとっては空虚なので，形式「$\hat{u}Fu$」と「$\{u: Fu\}$」のうちのいずれかが現われていた文献と衝突することはまったくありえまい．

3　von Neumann はそれを積極的には仮定しなかったが，私は *Mathematical Logic* でそうした．私がこういえば，その本を知っている読者には奇妙に思われようが，それは，以下の文章で説明される「V」のくいちがった用法のためにすぎない．

$$x \in \{u : u = x\} \notin \mathcal{V}, \qquad x \notin \hat{u}(u = x) = \Lambda.$$

さらに，あらゆるものは，$\{u : u = u\}$ というわれわれの意味での $\mathcal{V}$ に属する，一方，$\hat{u}(u = u)$ の意味での V には，ちょうど集合だけが属する；

$$(x)(x \in \{u : u = u\}), \qquad (x)(x \in \hat{u}(u = u) . \equiv (\exists z)(x \in z)).$$

私の『数理論理学』においては，非関与的な抽象という考えはなかった，それで，その本の V は $\hat{u}(u = u)$ であって $\{u : u = u\}$ ではない，したがって，その本での「$x \in$ V」は x の集合性を表現する正規の方法である；他方，この本でのわれわれにとっては，「$x \in \mathcal{V}$」はすべての x に対して成りたち，そして，「$\alpha \in \mathcal{V}$」は，α の集合性を未解決のままにしておいて，α の存在を表現するわれわれの正規の方法である．『数理論理学』に親しんでいる読者は，とくに，この対照に注意せねばならない．より安定したクラスには，その書物におけると同様，ローマ字体「V」を，また，それほど存在しそうには思われない絶対的にすべてのもののクラスにはスクリプト体「$\mathcal{V}$」を用いることによって，私はこのコントラストを字体のうちにまでもちこんできた．

究極クラスをもたない多くの体系では，もちろん，この区別は消える；そこではクラスはすべて集合であり，$\hat{u}Fu$ は $\{u : Fu\}$ であり，とくに，V は $\mathcal{V}$ であるが，これは存在しても存在しなくてもよい．そのような体系には，ラッセル，ツェルメロ，ベルナイス (1958)，私の『新基礎』，ロッサー (Rosser) の体系がある．そして，本書においては，集合とクラスの区別は，最後の二章にいたるまでは，上のような警告的な章句を除いて，われわれには関係ないであろう．それがわれわれと関係をもつにいたるときには，「V」と「$\mathcal{V}$」の印刷字体上の区別にたよる必要はないはずである；なぜなら，便利なことには，「$\cup\mathcal{V}$」が，§8 で現われて，「V」の働きをしてくれるであろうから．

III. クラスのクラス

7. 単一クラス

われわれにとってあらゆるものはクラスである，クラスでないかもしれぬどんなものも，個体を自分自身のメンバーとするという§4の裁定によって，クラスと同列になっているからである．この結果，あらゆるクラスはクラスのクラスであり，かくして，あらゆるものはクラスのクラスである．

あらゆるものがクラスである，ということについて重要なのは，自由変項が意味をなすどのような場所でも，クラス抽象体もまた意味をなすということである．その意味とは直観的な意味であるが，形式的には，その意味は，2.1と5.5によって，さらに，われわれがその他のすべての定義を，自由で現われるところでは変項よりもむしろギリシャ文字を用いて書きつづけることによって，与えられる．

変項を用いうる場所でギリシャ文字が現われるということは，§2では，次の二つの理由で，不可能であった：ギリシャ文字は，§4においてその逆がいわれる以前の便法が続いているあいだ，§2では，抽象体のみを表わしていて，変項まで表わすことはなかった；そして，抽象体は変項に対して禁じられた位置，すなわちエプシロン〔「ϵ」〕の後の位置（とその省略）にのみ認められていた．存在的ないい方をすれば，§2の本来の状況というのは，クラスは仮〔のもの〕にすぎず，そのメンバーだけが実〔のもの〕であり，したがって，クラスのクラスは仮の地位にさえ与からなかったのである．

かくして，§2においては，とくに，「$\{x\}$」と「$\{x,y\}$」とは定義できたが，「$\{\alpha\}$」または「$\{\alpha,\beta\}$」は定義できなかった．これが，§2で，「$\{x\}$」と「$\{x,y\}$」の定義に参照番号を控えた理由である．その段階では，「$z=x$」と「$\gamma=\alpha$」は利用できたが，「$z=\alpha$」は利用できなかった；したがって，「$\{\alpha\}$」を「$\{z\colon z=\alpha\}$」として定義することはできず，「$\{x\}$」を「$\{z\colon z=x\}$」と定義することで満足しなければならなかった．「$\{\alpha,\beta\}$」に対する「$\{x,y\}$」についても同様である．§4においては，ギリシャ文字に関する改められた便法が，5.1のように，結局，2.7を「$z=\alpha$」について意味をもつものとした．そこで，いま，「$\{\alpha\}$」と「$\{\alpha,\beta\}$」とを定義しよう：

7.1 「$\{\alpha\}$」は「$\{z\colon z=\alpha\}$」を表わし，
「$\{\alpha,\beta\}$」は「$\{\alpha\}\cup\{\beta\}$」を表わす．

事実，ギリシャ文字を「$\{\alpha\}$」へ入れることは，クラスの単一クラスについて語るのを有意味にするだけではない．「ϵ」を，§4 において原初的述語として採用し，したがって，クラスを実〔のもの〕とみなして以来，われわれは「x」自身を，クラスを——(もちろん，存在する)どのようなクラスにせよ，すべてのクラスを——値として認めるものとみなしている；したがって，$\{x\}$ はすでに任意のクラスの単一クラスであってもよいのである．「$\{\alpha\}$」による成果というのは，そのクラス x をその位置で変項のかわりに抽象体によっても言及されるようにする，という形式的な役目をわずかにうわ廻っている．そのわずかにうわ廻っているものというのは，「$\{\alpha\}$」を定義するのに，$\{x: Fx\}$ なるクラスが存在しないところでも，「$\{\{x: Fx\}\}$」にわれわれが意味をもたせているということである；だが，$\{\{x: Fx\}\}$ はこの場合 Λ であるから，その利点はわずかなものである．事実，

7.2　$$\alpha \notin \mho \,.\!\equiv.\, \{\alpha\} = \Lambda.$$

証明. 6.9 により

$$\alpha \notin \mho \,.\!\equiv (x)(x \neq \alpha)$$

(2.1, 7.1 により)　$$\equiv (x)(x \notin \{\alpha\})$$

(6.15 により)　$$\equiv.\, \{\alpha\} = \Lambda.$$

それゆえ，今後の定理型においては，定義とは反対に，「α」を「$\{\alpha\}$」の中に用いることは通常適当でない；「x」が十分にその範囲をつくしている．なぜなら，「α」は，$\alpha \in \mho$ なるかぎり，6.11 によってどのみち依然として「x」に対して自由に代入できる，そして，そうでないときには，$\{\alpha\}$ への関心は 7.2 のために消失するからである．

同様に，今後の定理型においては，定義とは反対に，「ϵ」の前に「α」を用いることは，通常，適当でない；再び，われわれは「x」で処理できる．「α」は，$\alpha \in \mho$ であるかぎり「x」に代入できるし，さもなければ，「ϵ」の前に「α」をもつ文節は，6.12 によって，単に偽になる．要するに，6.12 と 6.11 により，

7.3　$$\alpha \in \beta \,.\, (x)Fx \,.\!\supset F\alpha.$$

ところで，単一クラスにもどって，提案されているように「$\{\ \}$」の中の通常の変項によって定式化されたいくつかの定理と定理型とを以下にあげる．

7.4　$$\{x\} \subseteq \alpha \,.\!\equiv.\, x \in \alpha.$$

証明. 定義によって

$$\{x\} \subseteq \alpha \,.\!\equiv (y)(y = x \,.\!\supset.\, y \in \alpha)$$

(6.2 により)　　$\equiv . x \in \alpha.$

7.5　　$\{x, y\} \subseteq \alpha . \equiv . x, y \in \alpha.$

証明.

$$\{x\} \cup \{y\} \subseteq \alpha . \equiv . \{x\} \subseteq \alpha . \{y\} \subseteq \alpha$$

(7.4 により)　　$\equiv . x, y \in \alpha.$

7.6　　$x \in \{x\}, \quad x, y \in \{x, y\}.$　　**証明**は 7.4, 7.5 による.

7.7　　$\{x\} = \{y\} . \equiv . x = y.$

証明. 7.4 と定義により，$\{x\} \subseteq \{y\} . \equiv . x = y$. したがって，定義により，

$$\{x\} = \{y\} . \equiv . \{x\} \subseteq \{y\} \subseteq \{x\}$$
$$\equiv . x = y = x.$$

7.8　　$\{x, y\} = \{z\} . \equiv . x = y = z.$

証明. 定義により，$\{x, x\} = \{x\}$. したがって，6.7 により，

$$x = y = z . \supset . \{x, y\} = \{z\}.$$

逆に，定義により，

$$\{x, y\} = \{z\} . \supset . \{x, y\} \subseteq \{z\}$$

(7.5 により)　　$\supset . x, y \in \{z\}$

(定義により)　　$\supset . x = y = z.$

7.9　　$\{x, y\} = \{x, w\} . \equiv . y = w.$

証明. もし$\{x, y\} = \{x, w\}$ならば，そのときは，定義によって，$\{x, y\} \subseteq \{x, w\}$，したがって，7.5 により，$y \in \{x, w\}$であるが，これは定義により，$y = x . \vee . y = w$ を意味する. 同様に $\{x, w\} \subseteq \{x, y\}$，したがって，$w = x . \vee . w = y$. 結合して，$y = x = w . \vee . y = w$；かくして，$y = w$. 逆に，もし $y = w$ ならば，6.7 と 6.4 によって，$\{x, y\} = \{x, w\}$.

後の推理に現われる初等的な定理および定理型をすべて記録することはしない. 2.1 および他の定義によって単に「$p \equiv p$」の例であるような「$x \in \bar{\alpha} . \equiv . x \notin \alpha$」，あるいは，「$x \in \{\alpha\} . \equiv . x = \alpha$」のようなものは，あげずにおいて，必要が生じたときには単に用いることにする. ブール代数の法則——「$\alpha \subseteq \alpha$」，「$\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$」，および類似のものについても同様である；これらはまた，定義を参照すると本質的には真理関数的な考察に帰着する. たとえば，そのようなブール的な法則のひとつ：

$$\beta \cup \gamma \subseteq \alpha . \equiv . \beta \subseteq \alpha . \gamma \subseteq \alpha$$

は，7.5の証明で，いましがた，当然と認められていた；もうひとつ，7.8の証明の最初のステップでの「$\alpha \cup \alpha = \alpha$」も同様.

これまでは，いかなる特定のクラスをも仮定することなしに，事実，あるひとつのクラス以上には(§5参照)なんらかのクラスが存在する，ということをまったく仮定せずに，進んできた．いま，勘定の上ではつつましいクラスのいくつか，すなわち，メンバーが三箇より少ないすべてのクラス，を要請することによって，私は立派な履歴を傷つけることにする.

7.10 **公理** $\Lambda, \{x, y\} \in \mathcal{V}$.

これは，**一対化**(*pairing*)と**空クラス**(*null class*)の連合の公理である．それは，Λ が存在すること，またわれわれの領域におけるすべての対象 x と y に対して $\{x, y\}$ が存在すること，さらに，また，($\{x, x\}$ は $\{x\}$ だから) $\{x\}$ が存在することを仮定する.

この公理は，そのつつましさにもかかわらず，われわれを究極クラスに対する反対に捲きこむ．なぜなら，究極クラスとは $(y)(x \notin y)$ なるクラス x である；7.6と7.10により，われわれはたしかに $x \in \{x\} \in \mathcal{V}$ を有するし，したがって，6.11により，

7.11 $(\exists y)(x \in y)$

をうる．すなわち，あるのは集合だけである.

この決定の背後にある方策を素描してみよう．ただラッセルの逆理および類似の逆理のためにのみ，われわれは，素朴で無制限な包括化公理，簡単には「$\alpha \in \mathcal{V}$」，に固執しないのである．われわれは，逆理のために切りつめなければならないのであるから，あきらかに逆理に責任があるとみなされてよいもの以外には傷つけないのが賢明である．そこで，(たとえば，排中律を否定して)真理関数論理や量化論理を傷つけたりせずに，ただ集合論，「$\in$」の法則，のみを傷つけるのである．しかし，集合論においては，こんどは，有限クラスと無限クラスの顕著な区別がある；はっきりしないクラスは無限クラスで，無限クラスだけが逆理を惹きおこす．それで，最小限の毀損というわれわれの格率は，われわれがどのようなものを認めようと，それらの有限クラスはすべて認めることを好む；公理型13.1で，われわれはそうするであろう．それまでのあいだ，7.10はその方向にすこし踏みだすということなのである.

うえの議論は肝腎な点で漠然としているし，なにかを証明するつもりなのではない．だ

が，私がとっている方針にある種の理由めいたものを与えるのには役だつかもしれない．

終りの諸章で見るように，究極クラスがありがたいお恵みであることは疑えない．それらの章では，究極クラスを受けいれ，7.10 および 13.1 を廃止するという別の方法を示すであろう．また，そこでは，7.10 と 13.1 を，かくしてすべての有限クラスを保存して，さらに，むしろ究極クラスに似ているあるもの：それら自身より小さいクラスのみのメンバーとなりうるクラス，を与えるという折衷案についても考えるであろう．

ともかく，いまのところ，そして本書の最後の二章までずっと，あらゆるものは集合である．したがって，§6 の終りのほうで注意した $\hat{u}Fu$ と $\{u: Fu\}$ の区別はその間消失する；かくして，また，そこで注意した V と $\mho$，ιx と $\{x\}$ の区別も消える．

さて，われわれの公理にもどって，便利なことが以後判明する二つのつつましい包括化〔定理〕型を導こう．

7.12　　$\{\alpha\} \in \mho.$

証明．定義によって，$\{x\}=\{x\}\cup\{x\}=\{x, x\}$．したがって，7.10 により，$(x)(\{x\} \in \mho)$．ゆえに，6.11 により，$\alpha \in \mho . \supset . \{\alpha\} \in \mho$．しかるにまた，7.2 により，

$$\alpha \notin \mho . \supset . \{\alpha\} = \Lambda$$

(7.10, 6.7 により)
$$\supset . \{\alpha\} \in \mho.$$

7.13　　$\{\alpha, \beta\} \in \mho.$

証明．ケース 1：$\alpha, \beta \in \mho$．しかるに，7.10 により，

$$(x)(y)(\{x, y\} \in \mho).$$

したがって，6.11 により，$(y)(\{\alpha, y\} \in \mho)$．そこで，再び，6.11 により，$\{\alpha, \beta\} \in \mho$．

ケース 2：$\beta \notin \mho$．すると，7.2 により，$\{\beta\}=\Lambda$．そのとき，定義により，

$$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha\} \cup \Lambda = \{\alpha\}.$$

したがって，7.12 と 6.7 により $\{\alpha, \beta\} \in \mho$．

ケース 3：$\alpha \notin \mho$．同様．

7.10，7.12 および 7.13 によって，次の歓迎すべき便法が採用できる：とくにそれら〔の公理や定理型〕を引き合いに出さずに，「Λ」と，「$\{\alpha\}$」，「$\{\alpha, \beta\}$」の形のすべての表現およびそれらの省略形を，今後は，変項に自由に代入する．これは，6.11 とともに 7.10 または 7.12 または 7.13 を暗黙のうちに用いることである．変項が自由なときでさえ，6.11 は，

もちろん，有効である；われわれは普遍量化子を考えているからである.

この便法は，次の証明の最初のステップで使われている.

7.14 $$\alpha = z \,.\!\equiv (x)(z \in x \,.\!\supset.\, \alpha \in x).$$

証明.

$$(x)(z \in x \,.\!\supset.\, \alpha \in x) \supset\colon z \in \{z\} \,.\!\supset.\, \alpha \in \{z\}$$

(7.6 により) $\supset.\, \alpha \in \{z\}$

(6.13 と 7.1 により) $\supset.\, \alpha = z.$

その逆は，$(x)(\alpha \in x \,.\!\supset.\, \alpha \in x)$ だから，6.6 によって成りたつ.

同一性の定義 2.7 は，「$y=z$」を「$(x)(x \in y \,.\!\equiv.\, x \in z)$」として説明する.「$y=z$」についてのそれ以前のもっとやっかいな表現は，§4 の (i) であった. そして，いま，われわれは 7.14 からもうひとつの表現「$(x)(z \in x \,.\!\supset.\, y \in x)$」を有する. これから，「$(x)(y \in x \,.\!\supset.\, z \in x)$」や「$(x)(y \in x \,.\!\equiv.\, z \in x)$」でも間にあうことが容易に分る. だが，興味のあるのは，この最後の三つの表現が存在公理 7.10，あるいはその系 7.12 に依存することである. すぐ前で述べた便法のために，7.14 の証明における 7.12 の役割が目だたないのである.

8. 合併，共通部分，記述

これから定義される有用な概念は，クラスのクラスについて語ることができるようになるまでは，利用できなかった.

8.1 「$\cup\alpha$」は「$\{x\colon x \in^2 \alpha\}$」を表わす.

文節「$x \in^2 \alpha$」は，「$(\exists y)(x \in y \in \alpha)$」の略であり，したがって「$\in$」の後に変項を有するが，これは，II 章冒頭の祖先の構成とおなじように，実際「$\in$」を I 章の仮理論の範囲外においているのである.

$\cup\alpha$ は，α のメンバーのすべてのメンバーのクラスであり，かくして，α のメンバーの**合併**(*union*)である. これは，α の**和**(*sum*)とよばれることも多い. もし α が有限個の多くのメンバー $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をもつなら，$\cup\alpha$ は，よく知られているブール的な意味での合併 $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ である；下記 8.4 参照. しかし，$\cup\alpha$ は，合併のブール的概念を一般化して，α が無限に多くのメンバーを有するときにも等しくそれに意味をもたせる. さらにまた，それには，次のような本来の意味を失ったケースもある：

8.2 $$\cup\{x\} = x.$$

証明. 6.1 により,

$$y \in x \mathrel{.}\equiv (\exists z)(y \in z = x)$$

(2.1, 7.1 により) $$\equiv \mathrel{.} y \in^2 \{x\}$$

はすべての y に対して成りたつ, すなわち, 5.1 と 8.1 により, $x = \bigcup\{x\}$.

8.2 を無条件に肯定できるということは, x がクラスのクラスであるようになんとか条件を設けなければならないというのに比して, あらゆるものがクラスであること, かくしてクラスのクラスであること, の便利さを再び例証している.

8.3 $$\bigcup(\alpha \cup \beta) = \bigcup\alpha \cup \bigcup\beta.$$

証明. 2.1 と 2.4 により,

$$x \in^2 \alpha \cup \beta \mathrel{.}\equiv (\exists y)(x \in y : y \in \alpha \mathrel{.\mathbf{v}.} y \in \beta)$$
$$\equiv \mathrel{.} (\exists y)(x \in y \in \alpha) \mathbf{v} (\exists y)(x \in y \in \beta)$$
$$\equiv : x \in^2 \alpha \mathrel{.\mathbf{v}.} x \in^2 \beta.$$

すなわち, 2.1 と 8.1 により,

$$x \in \bigcup(\alpha \cup \beta) \mathrel{.}\equiv : x \in \bigcup\alpha \mathrel{.\mathbf{v}.} x \in \bigcup\beta$$

はすべての x に対して成りたつ, つまり, 5.1 と 2.4 によって, $\bigcup(\alpha \cup \beta) = \bigcup\alpha \cup \bigcup\beta$.

それは, 系として次の定理という表題をもつ式を有する:

8.4 $$\bigcup\{x, y\} = x \cup y.$$

証明. 7.1 により,

$$\bigcup\{x, y\} = \bigcup(\{x\} \cup \{y\})$$

(8.3 により) $$= \bigcup\{x\} \cup \bigcup\{y\}$$

(8.2 により) $$= x \cup y.$$

合併の主要法則はこれである:

8.5 $$\bigcup\alpha \subseteq \beta \mathrel{.}\equiv (x)(x \in \alpha \mathrel{.\supset.} x \subseteq \beta).$$

証明.

$$(y)(y \in^2 \alpha \mathrel{.\supset.} y \in \beta) \equiv (y)(x)(y \in x \in \alpha \mathrel{.\supset.} y \in \beta)$$
$$\equiv (x)(x \in \alpha \mathrel{.\supset} (y)(y \in x \mathrel{.\supset.} y \in \beta)).$$

2.1 と他の定義により, これは 8.5 である.

α の各メンバーが β の部分クラスであるとき, β を, クラス包含に関して, α の**上界** (*upper bound*) という. このとき, 8.5 の要点は, $\bigcup\alpha$ が α の最小上界 (the least upper bound) である, ということである.

β を $\cup\alpha$ にとれば，系として，

8.6 $$x \in \alpha . \supset . x \subseteq \cup\alpha$$

をうる．

Λ のすべてのメンバーの合併は，われわれの予期する通りである．

8.7 $$\cup\Lambda = \Lambda.$$

証明. 6.14 により，$(x) \sim (x \in^2 \Lambda)$；すなわち，6.16 と 8.1 により，$\cup\Lambda = \Lambda$.

また対称的に，

8.8 $$\cup\mho = \mho.$$

証明. 7.11 と 6.8 により，$(x)(x \in^2 \mho)$. すなわち，6.16 と 8.1 により，$\cup\mho = \mho$.

しかし，8.8 は一見するほど陳腐ではない．7.11 によって，それはわれわれの存在公理 7.10（「$\{x\} \in \mho$」）に依存している．もし 7.10 で他の方向転換をし，究極クラスを認めていたなら，8.8 は偽になっていたであろう．$\cup\mho$ は，8.1 と 6.8 によって，絶対的に $\{x:(\exists y)(x \in y)\}$ であり，かくして，§6 の終りで $\hat{u}(u=u)$ とよばれた，すべての集合のクラスである．8.8 は，7.11 に従ってすべてのものが集合である，という理由だけで，われわれに対して成立するのである[1]. 8.8 は，すべての集合のクラス $\cup\mho$ をあらゆるもののクラス $\mho$ と同一視して，その考え方を再現しているにすぎない．

α のメンバーの合併という観念は，α のメンバーの**共通部分**(*intersection*)という観念，$\cap\alpha$，をその双対として有する．

8.9 「$\cap\alpha$」は「$\{x:(y)(y \in \alpha . \supset . x \in y)\}$」を表わす．

これは，α のすべてのメンバーの共通なメンバーを含む．したがって，α のメンバーが再び $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であるなら，$\cap\alpha$ は $x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_n$ である．$\cup\alpha$ が包含に関して α の最小上界であったのとおなじように，$\cap\alpha$ は最大下界(the greatest lower bound)である．8.2—8.7 に平行して：

8.10 $$\cap\{x\} = x,$$

8.11 $$\cap(\alpha \cup \beta) = \cap\alpha \cap \cap\beta,$$

8.12 $$\cap\{x, y\} = x \cap y,$$

1　したがって，8.8 は *Mathematical Logic* においては成立しない．この註釈に驚くその本の読者は，上記の §6 の終りに注意した区別を思いおこさねばならない．*Mathematical Logic* で「V」と命名されているもの，すなわち，$\hat{u}(u=u)$ は，正確には，われわれの $\cup\mho$ である．

8.13 $\beta \subseteq \cap \alpha . \equiv (x)(x \in \alpha . \supset . \beta \subseteq x)$,

8.14 $x \in \alpha . \supset . \cap \alpha \subseteq x$,

8.15 $\cap \Lambda = \mathfrak{V}$,

をうるが，証明は読者にまかせる．そして，最後に，8.8 と平行に次の式をうる：

8.16 $\cap \mathfrak{V} = \Lambda.$

証明．7.10 により，$\Lambda \in \mathfrak{V}$．したがって，8.14 により，$\cap \mathfrak{V} \subseteq \Lambda$．

興味あるのは，「$\cup \mathfrak{V} = \mathfrak{V}$」の証明が 7.10 の 7.11 という面に依存していたのに反して，この「$\cap \mathfrak{V} = \Lambda$」の証明は 7.10 の「$\Lambda \in \mathfrak{V}$」という部分にのみ依存していることである．事実，「$\cap \mathfrak{V} = \Lambda$」は「$\Lambda \in \mathfrak{V}$」ほど必要ではない；たとえ $\Lambda \notin \mathfrak{V}$ としても，二つのたがいに排除する〔共通のメンバーをもたない〕クラスがあるかぎり，やはり「$\cap \mathfrak{V} = \Lambda$」をうる．どれかひとつの包括化公理なしには「$\cap \mathfrak{V} = \Lambda$」をうることはできないが，どんな理にかなった集合論でも適切な包括化公理を含んでいないことはないであろう．したがって，究極クラスをもたない集合論に対してのみ成りたつところのその双対「$\cup \mathfrak{V} = \mathfrak{V}$」とは違って，「$\cap \mathfrak{V} = \Lambda$」は集合論における共通の通貨である．

この事情は，より対称的な選択としての 7.11 に組みすることによって，7.11（「$(\exists y)(x \in y)$」）と究極クラスとのあいだの §7 のディレンマに関係してくる．われわれは，「$\cap \mathfrak{V} = \Lambda$」をもたざるをえないし，その双対「$\cup \mathfrak{V} = \mathfrak{V}$」は帰するところ 7.11 になる．

定理「$\cup \{x\} = x$」と「$\cap \{x\} = x$」の帰結は，「$\cup \{x: Fx\}$」，あるいはそれと等しく，「$\cap \{x: Fx\}$」という記法形式が，Fx なるひとつのそしてただひとつの対象 x が事実存在するときはいつでも，単称記述(singular description)，「$(\imath x)Fx$」，「Fx なるその対象 x」(the object x such that Fx)，という慣用句の役をするということである．すなわち，

8.17 $(x)(Fx \equiv . x = y) \supset . \cup \{x: Fx\} = \cap \{x: Fx\} = y.$

証明．仮説と定義により，$\{x: Fx\} = \{y\}$．したがって，y は，8.2 によって，$\cup \{x: Fx\}$，また，8.10 によって，$\cap \{x: Fx\}$ である．

単称記述の基本的な法則と要求は，

$$(x)(Fx \equiv . x = y) \supset . (\imath x)Fx = y$$

であり，これは，8.17 の語るところによれば，「$(\imath x)Fx$」を「$\cup \{x: Fx\}$」または「$\cap (x: Fx\}$」として定義することによって満足されるであろう．しかし，包括化前提との関係でより便利なことが判明する別のやり方がある．もし「$(\imath x)Fx$」を，$\sim (\exists y)(x)(Fx \equiv . x = y)$

のとき，むしろ，恣意的にではあるが，きまって Λ になるような仕方で定義するならば，すべてのケースに対して「$(\imath x)Fx \in \mho$」をうることができる．これが，次のより複雑な定義の理由である：

8.18 「$(\imath x)Fx$」は「$\cup\{y:(x)(Fx \equiv . x=y)\}$」を表わす．

さて，基本法則は次のようにしてえられる：

8.19 $$(x)(Fx \equiv . x=y) \supset . (\imath x)Fx = y.$$

証明．仮説によって，

$$\begin{aligned}(x)(Fx \equiv . x=z) &\supset (x)(x=y . \equiv . x=z)\\ &\supset : z=y . \equiv . z=z\\ &\supset . z=y.\end{aligned}$$

逆に，仮説と 6.7 により，

$$z=y . \supset (x)(Fx \equiv . x=z).$$

結合して

$$(z)((x)(Fx \equiv . x=z) \equiv . z=y).$$

したがって，8.17 により，

$$\cup\{z:(x)(Fx \equiv . x=z)\} = y.$$

よって，8.18 により，$(\imath x)Fx=y$.

さらに，次の帰結がえられる：

8.20 $$(x)(Fx \equiv . x=y) \supset : Fz \equiv . z=(\imath x)Fx.$$

証明．仮説により，$Fz \equiv . z=y$．しかるに，仮説と 8.19 によって，$y=(\imath x)Fx$.

これに付随して，

8.21 $$y=(\imath x)(x=y).$$

証明は，$(x)(x=y . \equiv . x=y)$ なので，8.19 による．

最後に空なるケース：

8.22 $$\sim(\exists y)(x)(Fx \equiv . x=y) \supset . (\imath x)Fx = \Lambda.$$

証明．仮説と 6.16 により，

$$\{y:(x)(Fx \equiv . x=y)\} = \Lambda.$$

したがって，8.18 により，$(\imath x)Fx=\cup\Lambda$．すなわち，8.7 により，$(\imath x)Fx=\Lambda$.

記述はどんな種類の対象に対しても必要とされ，しかも，$(\imath x)Fx$ は 8.18 におけるようにクラスである．それにもかかわらず，この定義で十分である——「$\cup\{x: Fx\}$」または「$\cap\{x: Fx\}$」でさえも間にあう——ということは，個体をクラスに同化したことの恩恵である．

最後に，より簡単な「$\cup\{x: Fx\}$」または「$\cap\{x: Fx\}$」のかわりに，8.18 を採用したことの恩恵を刈りいれることにしよう．

8.23　　$(\imath x)Fx \in \mathfrak{V}$.

証明. 8.22 と 8.19 により，

$$(\imath x)Fx = \Lambda . \mathbf{v} (\exists y)((\imath x)Fx = y).$$

したがって，ケースに応じて，7.10 または 6.9 により，$(\imath x)Fx \in \mathfrak{V}$.

§7 の終り近くで採用した時間節約の便法は，したがって，いまでは記述に拡張できる．すなわち，「Λ」と，「$\{\alpha\}$」，「$\{\alpha, \beta\}$」という形のすべての表現と，さらに，「$(\imath x)Fx$」，およびこれらの省略形とを今後は自由に変項へ代入するであろう．

例証として，8.20 の「z」に「$(\imath x)Fx$」を代入し，したがって，

8.24　　$(x)(Fx \equiv . x = y) \supset F(\imath x)Fx$

を結論してよい．

9. 対(つい)のクラスとしての関係

クラスのクラスについて語るのを許すことによって利用できるようになるものとしては，もうひとつ，**順序対**(つい)(*ordered pair*) $\langle x, y\rangle$ という簡単で重宝な概念がある．順序対の概念について要求されるのは，対(つい)が，その対になっている二つの対象を，一義的にひとつの順序で決定することである．クラス $\{x, y\}$ は，x と y を決定するが，どちらがどちらであるかを決定できない；すなわち，$\{x, y\}=\{y, x\}$. 順序対について要求される基本的な法則は，$\{x, y\}=\{z, w\}$ のときはいつでも $\langle x, y\rangle=\langle z, w\rangle$ なのではなく，$x=z$ かつ $y=w$ のときにかぎって $\langle x, y\rangle=\langle z, w\rangle$ なることである．「$\langle x, y\rangle$」のどの定義も，それがいかに恣意的で人為的であろうと，この基本的な法則を満足すれば適切なのである．ウィーナー(Wiener)は，$\langle x, y\rangle$ をクラスのあるクラスとして説明することで，この問題を解決した．クラトウスキー(Kuratowski)によるウィーナーの定義の変形はこうである：

9.1　　「$\langle\alpha, \beta\rangle$」は「$\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$」を表わす．

かくして，$\langle x, y\rangle$ は，そのメンバーが $\{x\}$ と $\{x, y\}$ であるようなクラスである．前節の終りで要約した便法のおかげで，幸いにも，いかなる順序対的な表現もただちに変項へ自由に代入されてよい，「$\langle\alpha, \beta\rangle$」は，「$\{\gamma, \delta\}$」の形の表現の省略として定義されているからである．

われわれは，順序対の基本法則の確立に進もう．

9.2
$$\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \,.\!\supset\!.\, x = z \,.\, y = w.$$

証明[1]．7.6 と 9.1 により，$\{x\} \in \langle x, y\rangle$．したがって，仮説により，$\{x\} \in \langle z, w\rangle$．すなわち，2.1 と他の定義により，

$$\{x\} = \{z\} \,.\!\mathbf{v}\!.\, \{x\} = \{z, w\}.$$

すなわち，7.7 と 7.8 により，$x{=}z \,.\!\mathbf{v}\!.\, x{=}z{=}w$．ゆえに，$x{=}z$．そこで，仮説により，$\langle x, y\rangle{=}\langle x, w\rangle$．すなわち，7.9 と 9.1 により，$\{x, y\}{=}\{x, w\}$．すなわち，7.9 により，$y{=}w$．

9.2 の有効な変形は：

9.3
$$\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \,.\!\equiv\!.\, x = z \,.\, y = w.$$

証明．$\langle x, y\rangle{=}\langle x, y\rangle$；よって，6.6 を二度使って，

$$x = z \,.\, y = w \,.\!\supset\!.\, \langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle.$$

逆は 9.2 による．

順序対の主な効能は，クラスの理論の中で関係を擬造することを可能にする，ということである．関係 $\{xy\colon Fxy\}$ を擬造するものは，Fxy なるすべての対 $\langle x, y\rangle$ のクラスである．

これまでは，関係を仮〔のもの〕としてのみ見てきた(§3)．関係を表わす「R」および同種の文字は，関係帰属「zRw」の位置においてのみ定義された「$\{xy\colon Fxy\}$」という形の関係抽象体を表わす型文字にすぎなかった．だが，以下の諸章では，関係に似たあるものを議論の世界の実在するメンバー，つまり，真正の量化可能な変項「x」,「y」，等々，の値として認めるということが，関係の仮理論だけでは不十分であるようないくつかの重要な事柄の定式化を可能にするのを見るであろう．クラスの実理論へ移る際に，2.1 の文脈的に定義された「ϵ」をこえて，われわれが真正の変項のあいだで使用するために原初的述語「ϵ」を採用したのとおなじように，いまや§3 の文脈的に定義された「xRy」をこえて，

1　John C. Torrey によって短縮された．

「xRy」の「R」の位置に真正の変項「z」を許す関係帰属の原初的記法を採用してもよかったかもしれない．しかしながら，順序対のおかげで，そのようなそれ以外の原初的記法は必要とされないことになる；「$\langle x, y\rangle \in z$」で間にあうであろう．

それを犯すと矛盾におちいるために，「Fx」の役をするすべての開放文に対して，実クラス $z=\{x: Fx\}$ を仮定することは不可能である，ということを，§5で見た；たとえば，「Fx」が「$x \notin x$」ととられたとき，ラッセルの逆理が現われるのを禁じえなかった．ラッセルも考察しているように，いまや，それに対応する状況が関係についても生ずる：それを犯すと矛盾におちいるために，「Fxy」の役をするすべての開放文に対して，

(i) $$(x)(y)(\langle x, y\rangle \in z \,.\equiv Fxy)$$

なる対-クラス z を認めることは不可能である．「Fxy」を「$\langle x, y\rangle \notin x$」にとろう；このとき，(i)は：

$$(x)(y)(\langle x, y\rangle \in z \,.\equiv.\, \langle x, y\rangle \notin x)$$

となるが，これは，矛盾：

$$(y)(\langle z, y\rangle \in z \,.\equiv.\, \langle z, y\rangle \notin z)$$

を含意するからである．したがって，(i)のどのケースを採用すべきかという問題は，それに対応するクラスの問題のように，選択の余地ある，ありうべき存在公理によって解決さるべきものである．事実，一方の問題は，順序対のクラスの存在の問題として，もう一方の問題に含まれる．われわれは，順序対の概念と補助的な存在公理7.10のおかげで，§3におけるような関係の仮理論を，順序対の仮と実のクラスに組みすることによって，いまは，まったくとり除くことができる．

予備的ステップとして，順序対との関連においても，また今後の点との関連においても，役にたつであろうところの一般的な記法手段を導入しよう．「$\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots$」を，暫くのあいだ，その自由変項が示されている通りの，あるクラス抽象体と考えよう．

9.4 「$\{\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots : Fx_1x_2 \ldots x_n\}$」は
「$\{z: (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(Fx_1x_2\ldots x_n \,.\, z = \ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots)\}$」を表わす

と定義する．たとえば，「$\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots$」を，（クラス抽象体の省略形である）「$\langle x, y\rangle$」ととれば：

「$\{\langle x, y\rangle : Fxy\}$」は「$\{z: (\exists x)(\exists y)(Fxy \,.\, z = \langle x, y\rangle)\}$」を表わす，

をうる．このようにして，$\{\langle x, y\rangle : Fxy\}$ は Fxy なるすべての順序対 $\langle x, y\rangle$ のクラスで

ある．同様に，$\{\{x\}: Fx\}$ は Fx なるもの x のすべての単一クラスのクラスである；$\{\bar{x}: Fx\}$，あるいはまた，$\{\langle x, \Lambda\rangle: Fx\}$ に対しても同様である．この最後は，Fx なるすべての対 $\langle x, \Lambda\rangle$ のクラスである．次の制限に注意してほしい：

$$\{\langle x, \Lambda\rangle: Fx\} = \{z: (\exists x)(Fx \,.\, z = \langle x, \Lambda\rangle)\}$$

であるのに反して，変項「y」をもつ「$\{\langle x, y\rangle: Fx\}$」は，

$$\{z: (\exists x)(Fx \,.\, z = \langle x, y\rangle)\}$$

としてではなく，むしろ

$$\{\langle x, y\rangle: Fx\} = \{z: (\exists x)(\exists y)(Fx \,.\, z = \langle x, y\rangle)\}$$

と解すべきである．その他の表現はそれが問題となるときには，略さずに全部書き出されねばならない．要は，コロンの左側にあるすべての変項が全体の束縛変項に数えられる，ということである[2]．

9.4 に対する現在の興味は，今後すべての目的にかなうであろう記法「$\{\langle x, y\rangle: Fxy\}$」と，さらに「$\{xy: Fxy\}$」とが，それから結果するということである．われわれは，次の具体化の法則(law of concretion)をうる：

9.5 $$\langle z, w\rangle \in \{\langle x, y\rangle: Fxy\} \,.\!\equiv Fzw.$$

証明． 9.4 と 2.1 により，

$$\langle z, w\rangle \in \{\langle x, y\rangle: Fxy\} \,.\!\equiv (\exists x)(\exists y)(Fxy \,.\, \langle z, w\rangle = \langle x, y\rangle)$$

(9.3 により) $$\equiv (\exists x)(\exists y)(Fxy \,.\, z = x \,.\, w = y)$$

(6.1 により) $$\equiv Fzw.$$

この法則は，将来の目的に対して，記法「$\{xy: Fxy\}$」と「zRw」という二つの形を関係の仮理論へ導入した§3の文脈的定義の代りをする．これらの記法形式は，今後は，「$\{\langle x, y\rangle: Fxy\}$」および「$\langle z, w\rangle \in \alpha$」の方を取るために，用いられないであろう，また，関係の型文字「Q」,「R」，等々，は一般的な「α」,「β」，等々，のために不用となる．もちろん，$\{\langle x, y\rangle: Fxy\}$ は，$\mathfrak{V}$ におけるメンバー性の意味では，依然として，実〔クラス〕であることも実〔クラス〕でないこともある．

関係に対する包含，合併および共通部分のブール的概念の定義は，それに代るものをもたなくても，いまでは落すことができる；なぜなら，クラスに対する平行的な定義 2.2—2.5 が全範囲をおおうからである．他方，§3 の補関係(relation complement)の定義は，

2 *Logic for Mathematicians*, 221 ページ以下，における Rosser の便法は幾分違っている．

αが対のクラスである場合，$\bar{\alpha}$ が対でないすべてのものをそのメンバーにもつので，クラスの場合のその類似物 2.6 では十分でない．しかしながら，このことは，クラス α の**関係部分**(*relational part*) $\cdot\alpha$ を α におけるすべての順序対のクラスと定義することによって，他のことと併せて，容易に調整される，かくして：

9.6 「$\cdot\alpha$」は「$\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in \alpha\}$」を表わす．

そこで，αに対する補関係は，補クラス $\bar{\alpha}$ とは対照的に，$\cdot\bar{\alpha}$ となる．

すべての順序対のクラスは，$\cdot\mho$ として現われる．したがって

9.7 $$\cdot\alpha = \alpha \cap \cdot\mho.$$

証明．6.7 により，

$$\{z : (\exists x)(\exists y)(z = \langle x, y\rangle \in \alpha)\} = \{z : z \in \alpha \,.\, (\exists x)(\exists y)(z = \langle x, y\rangle)\}.$$

すなわち，($\langle x, y\rangle \in \mho$ なので) 2.1 と他の定義によって $\cdot\alpha = \alpha \cap \cdot\mho$.

関係に対する包含の§3の定義に似たものは，やはり，定理型として記しておくに値する．

9.8 $$\cdot\alpha \subseteq \beta \,.\!\equiv (x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\supset\!.\, \langle x, y\rangle \in \beta).$$

証明．定義により，

$$\begin{aligned} \cdot\alpha \subseteq \beta \,.\!\equiv & (z)((\exists x)(\exists y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\, z = \langle x, y\rangle) \supset .\, z \in \beta) \\ \equiv & (x)(y)(z)(z = \langle x, y\rangle \,.\!\supset\!:\, \langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\supset\!.\, z \in \beta) \\ (6.2 \text{ により}) \quad \equiv & (x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\supset\!.\, \langle x, y\rangle \in \beta). \end{aligned}$$

関係間の同一性の§3における定義は，包含のそれと同様である．それは，定義に関するかぎり，一般的な 2.7 となるが，定理型としては次のようになる：

9.9 $$\cdot\alpha = \cdot\beta \,.\!\equiv (x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\equiv\!.\, \langle x, y\rangle \in \beta).$$

証明．ブール代数により，

$$\alpha \cap \cdot\mho \subseteq \beta \cap \cdot\mho \,.\!\equiv\!.\, \alpha \cap \cdot\mho \subseteq \beta.$$

すなわち，9.7 により，$\cdot\alpha \subseteq \cdot\beta \,.\!\equiv\!.\, \cdot\alpha \subseteq \beta$. $\cdot\beta \subseteq \cdot\alpha$ に対しても同様．したがって，2.7 により，

$$\begin{aligned} \cdot\alpha = \cdot\beta \,.\!\equiv . & \cdot\alpha \subseteq \beta \,.\, \cdot\beta \subseteq \alpha \\ (9.8 \text{ により}) \quad \equiv & (x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\equiv\!.\, \langle x, y\rangle \in \beta). \end{aligned}$$

9.5 と 9.6 により，

9.10 $\cdot\{\langle x, y\rangle : Fxy\} = \{\langle x, y\rangle : Fxy\}, \qquad \langle x, y\rangle \in \cdot\alpha . \equiv . \langle x, y\rangle \in \alpha.$

したがって，小点〔「˙」〕は，対-クラス抽象体(またはその任意の省略形)の上や，あるいは，順序対的な表現がそれに先行しているエプシロンの後に現われるときには，無視できる．この権利は，今後，註釈なしに行使されるであろう．

§3のその他の定義は，必要な変更を加えたうえで，ただちに再び採用される必要がある．それゆえ，右域と左域の**制限**(*confinement*)に対する記号を加えておく．

9.11 「$\alpha\times\beta$」は「$\{\langle x, y\rangle : x\in\alpha . y\in\beta\}$」を表わす，

9.12 「$\breve{\alpha}$」または「$\breve{}\alpha$」は，「$\{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle\in\alpha\}$」を表わす，

9.13 「$\alpha|\beta$」は「$\{\langle x, z\rangle : (\exists y)(\langle x, y\rangle\in\alpha . \langle y, z\rangle\in\beta)\}$」を表わす，

9.14 「$\alpha``\beta$」は「$x : (\exists y)(\langle x, y\rangle\in\alpha . y\in\beta)\}$」を表わす，

9.15 「I」は「$\{\langle x, y\rangle : x = y\}$」を表わす，

9.16 「$\alpha\upharpoonright\beta$」は「$\alpha\cap(\mho\times\beta)$」を表わす，

9.17 「$\beta\urcorner\alpha$」は「$\alpha\cap(\beta\times\mho)$」を表わす．

術語「連結的」，「反射的」，等々，に対しても同様である．また，§3の終りで述べた関係の代数からの各種の代表的法則は，いまでは関係部分を示す小点がその二・三のものには必要であることを除いて，翻訳すればひきつづき成りたつ，かくして：

$$\cdot\alpha\subseteq\alpha``\mho\times\breve{\alpha}``\mho, \qquad \breve{\breve{\alpha}} = \cdot\alpha, \qquad \alpha|I = I|\alpha = \cdot\alpha.$$

証明は型にはまっているので，この段階で定理型の明白な背景を展開することは不必要に思われる．それは，定義をあげ，具体化の法則9.5とたぶん9.10を適用し，それから，当の定理型が，量化と真理関数とあるいはたぶん同一性の論理学(しばしば6.1または6.2)の，よく知られているかそれとも明らかな定理型であることを観察する，といった事柄である．したがって，証明において，クラスのブール代数の法則を用いてきたのと同様に，インフォーマルに関係の代数の典型的な法則を用いるであろう．私は，読者が，§3に挙げられている等値や含意とその他それとおなじ程度のもの，さらに，定義9.11—9.15を熟知しているものと仮定するであろう．$\langle x, y\rangle\in\alpha$，あるいは $\langle y, x\rangle\in\alpha$，あるいは $(\exists y)(\langle x, y\rangle\in\alpha)$，あるいは $(\exists y)(\langle y, x\rangle\in\alpha)$ に応じて，任意のもの x は，$\alpha``\{y\}$，あるいは $\breve{\alpha}``\{y\}$，あるいは $\alpha``\mho$，あるいは $\breve{\alpha}``\mho$ のメンバーであること；また，$\alpha\cap(\beta\times\beta)$，$\alpha\cap(\beta\times\mho)$，および $\alpha\cap(\mho\times\beta)$ は，その全域，左域および右域が β に制限された α であること；また，$\alpha``\beta$ は $\alpha\cap(\mho\times\beta)$ の左域であり，$\alpha``(\breve{\alpha}``\mho)$ は $\alpha``\mho$ であることは考えるまでもなく明らかであ

ろう.

10. 関　数

関数について言われねばならぬことの一部は§3で言われた. 仮理論で処理することがより困難であったそれ以上の事柄は, どこで扱われてもかまわなかったような細目のいくつかとともに, 本節のために保留されていたのである.

関数であることを表わす記法と, 変域あるいは独立変項のクラスを表わす記法とは, いまや, §3の定義を改めることによって定義されうる. 参照の便宜上, 定義に簡潔な形とより散漫な形とを併せて与えておく. 関数の場合には, 長い目で見ると, 文節「$\alpha = {}^{\cdot}\alpha$」を加え, かくして対でない不用のメンバーをつみ取って, 関数が純粋の関係であることを要求するのが最善であるのが分る. これは, §3のレベルではおこりえなかった随意な選択であった.

10.1　「$\mathrm{Func}\,\alpha$」は, 「$\alpha|\breve{\alpha} \subseteq I \,.\, \alpha = {}^{\cdot}\alpha$」, あるいは「$(x)(y)(z)(\langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha \,.\!\supset\!.\, x = y) \,.\, \alpha = {}^{\cdot}\alpha$」を表わす.

10.2　「$\arg \alpha$」は, 「$\{x : (\exists y)(\alpha``\{x\} = \{y\})\}$」, あるいは「$\{x : (\exists y)(z)(\langle z, x\rangle \in \alpha \,.\!\equiv\!.\, z = y)\}$」を表わす.

明瞭な若干の関数は, Λ, I, および $\{\langle x, y\rangle\}$ である.

10.3　$\mathrm{Func}\,\Lambda.$

証明. $\Lambda|\breve{\Lambda} = \Lambda \subseteq I.$ さらに, 9.7によって $\Lambda = {}^{\cdot}\Lambda.$

10.4　$\mathrm{Func}\, I, \quad \arg I = \mho.$　**証明**は定義から明らかである.

10.5　$\mathrm{Func}\,\{\langle x, y\rangle\}.$

証明. 2.1と7.1により,

$$\langle v, z\rangle, \langle w, z\rangle \in \{\langle x, y\rangle\} \,.\!\supset\!.\, \langle v, z\rangle = \langle x, y\rangle = \langle w, z\rangle$$

(9.2により)
$$\supset .\, v = w.$$

定義によって,

$${}^{\cdot}\{\langle x, y\rangle\} = \{\langle z, w\rangle : \langle z, w\rangle = \langle x, y\rangle\}$$

(9.3により)
$$= \{\langle z, w\rangle : z = x \,.\, w = y\}$$

(9.4により)
$$= \{v : (\exists z)(\exists w)(v = \langle z, w\rangle \,.\, z = x \,.\, w = y)\}$$

(6.1, 7.1 により)　$= \{\langle x, y\rangle\}$.

つぎに，六箇の定理型.

10.6 $\mathrm{Func}\,\alpha\,.\,\mathrm{Func}\,\beta\,.\supset \mathrm{Func}\,\alpha|\beta$.

証明.

$$\langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha|\beta \qquad [\mathrm{i}]$$

なる任意の x, y, z を考えよう．すると，定義によって，

$$\langle x, u\rangle, \langle y, v\rangle \in \alpha, \qquad [\mathrm{ii}]$$
$$\langle u, z\rangle, \langle v, z\rangle \in \beta \qquad [\mathrm{iii}]$$

なる u と v が存在する．仮説と 10.1 によって，[iii] から $u=v$ を推論できる．したがって，[ii] により，$\langle x, v\rangle, \langle y, v\rangle \in \alpha$. ゆえに，仮説と 10.1 により，$x=y$. しかるに，$x, y$ および z は [i] を満足する任意のものであった．それゆえ，10.1 により，$\mathrm{Func}\,\alpha|\beta$.

10.7 $\mathrm{Func}\,\alpha\,.\,y \notin \breve{\alpha}``\mho\,.\supset \mathrm{Func}\,\alpha\cup\{\langle x, y\rangle\}$.

証明. $\langle u, w\rangle, \langle v, w\rangle \in \alpha\cup\{\langle x, y\rangle\}$ なる任意の u, v, w を考えよう．もし $w\neq y$ なら，$\langle u, w\rangle$ と $\langle v, w\rangle$ はともに α の中にある；そしてそのとき，$\mathrm{Func}\,\alpha$ であるから，$u=v$. もし $w=y$ なら，$y\notin\breve{\alpha}``\mho$ なので，$\langle u, w\rangle$ と $\langle v, w\rangle$ はともに $\{\langle x, y\rangle\}$ の中にある；そのとき $u=x$ および $v=x$, したがって，このときも，$u=v$.

10.8 $\mathrm{Func}\,\alpha \supset \mathrm{Func}\,\alpha\cap\beta$.　**証明**は 10.1 から明らかである．

10.9 $\arg\alpha \subseteq \breve{\alpha}``\mho$.

証明. 定義によって，

$$x \in \arg\alpha\,.\supset (\exists y)(\{y\} \subseteq \alpha``\{x\})$$
(7.4 により)
$$\supset (\exists y)(y \in \alpha``\{x\})$$
$$\supset (\exists y)(\langle y, x\rangle \in \alpha).$$

10.10
$$\mathrm{Func}\,\alpha \equiv .\ \breve{\alpha}``\mho \subseteq \arg\alpha$$
$$\equiv .\ \breve{\alpha}``\mho = \arg\alpha.$$

証明. $\mathrm{Func}\,\alpha$ かつ $x\in\breve{\alpha}``\mho$ と仮定しよう．それゆえ，$\langle y, x\rangle\in\alpha$ なるあるもの y がある．10.1 によって，任意の z に対して，$\langle z, x\rangle \in\alpha\,.\supset .\,y=z$；そして，6.7 により，逆もえられる．そこで，

$$(z)(\langle z, x\rangle \in \alpha \,.\!\equiv\!.\, z = y),$$

かくして，10.2により，$x \in \arg\alpha$. したがって，

$$\text{Func}\,{}^{\cdot}\alpha \supset .\, \breve{\alpha}``\mho \subseteq \arg\alpha. \tag{1}$$

さて，逆に，$\breve{\alpha}``\mho \subseteq \arg\alpha$ と仮定しよう．そして，$\langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha$ なる任意の $x, y, z$ を考えよう．そのとき，$z \in \breve{\alpha}``\mho$，したがって，$z \in \arg\alpha$，それゆえ，10.2により，

$$(u)(\langle u, z\rangle \in \alpha \,.\!\equiv\!.\, u = w)$$

なるあるもの w がある．だが，そのとき，$\langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha$ であるから，$x=w$ と $y=w$ を，したがって，$x=y$ をうる．それゆえ，10.1により，$\text{Func}\,{}^{\cdot}\alpha$. かくして，(1)の逆が証明される．結びつけて，

$$\text{Func}\,{}^{\cdot}\alpha \equiv .\, \breve{\alpha}``\mho \subseteq \arg\alpha$$

(10.9により)　$$\equiv .\, \breve{\alpha}``\mho = \arg\alpha.$$

10.10a　$$\text{Func}\,\alpha \,.\, \breve{\alpha}``\mho \subseteq \breve{\beta}``\mho \,.\, \beta \subseteq \alpha \,.\!\supset\!.\, \alpha = \beta.$$

証明．もし $\langle x, z\rangle \in \alpha$ ならば，第2の仮説により，ある y に対して $\langle y, z\rangle \in \beta$. そのとき，$\beta \subseteq \alpha$ であるから，$\langle y, z\rangle \in \alpha$. さらに，$\text{Func}\,\alpha$ であるから，$x=y$. かくして，$\langle x, z\rangle \in \beta$. それゆえ，9.8によって，${}^{\cdot}\alpha \subseteq \beta$；すなわち，10.1により，$\alpha \subseteq \beta$.

$x \in \arg\alpha$ なるとき，$\langle y, x\rangle \in \alpha$ なるひとつのそしてただひとつの対象 y が存在する；これを簡単に $\alpha`x$ として示そう．それは，**関数適用**(*function application*)の記法で，次のように定義できる：

10.11　「$\alpha`\beta$」は「$(\imath y)(\langle y, \beta\rangle \in \alpha)$」を表わす．

記法「$\alpha`x$」は，「$x$ の $\alpha$」(the $\alpha$ of $x$)と読むのが便利である，「$x$ の $\alpha$」とは，$x \in \arg\alpha$ という興味ある場合に，「$x`\alpha$」がそうなるものだからである．数学的用法でおなじみの「$f(x)$」のためにむしろ「$\alpha(x)$」と書きたくなるが，何が作用しているかをわれわれに思い出させるところの「f」のようにはっきりと関数的である文字がないときには，ペアノからホワイトヘッドとラッセルを通じて伝わっている「$\alpha`x$」という形の方が二つの記法のうちではより生き生きとしている．

「$\alpha`\beta$」は定義によって「$(\imath x)Fx$」という形をもつので，記述をただちに変項へ代入することについてすでに定めた慣行は，とくに，「$\alpha`\beta$」という形の表現に適用される．

つぎに，一連の定理型に移ろう．10.13と10.14の証明は，上の便法を例証している．

10.12　　$w \in \arg\alpha \, .\supset : \langle z, w\rangle \in \alpha \, .\equiv . \, z = \alpha ` w.$

証明．仮説と 10.2 により，

$$(x)(\langle x, w\rangle \in \alpha \, .\equiv . \, x = y)$$

なるあるもの y がある．したがって，8.20 により，

$$\langle z, w\rangle \in \alpha \, .\equiv . \, z = (\iota x)(\langle x, w\rangle \in \alpha),$$

q. e. d. (10.11 参照).

10.13　　$w \in \arg\alpha \, .\equiv . \, \alpha `` \{w\} = \{\alpha ` w\}.$

証明．10.12 により，

$$w \in \arg\alpha \, .\supset \; (z)(z \in \alpha``\{w\} \, .\equiv . \, z = \alpha ` w)$$
$$\supset . \, \alpha``\{w\} = \{\alpha ` w\}.$$

逆は 10.2 による．

10.14　　$w \in \arg\alpha \, .\supset . \, \langle \alpha ` w, w\rangle \in \alpha.$

証明．10.12 の z を $\alpha ` w$ にとる．

10.15　　$w \notin \arg\alpha \, .\supset . \, \alpha ` w = \Lambda.$

証明．仮説と 10.2 により，

$$\sim(\exists y)(x)(\langle x, w\rangle \in \alpha \, .\equiv . \, x = y).$$

したがって，8.22 と 10.11 により，$\alpha ` w = \Lambda$.

10.16　　$\mathrm{Func}\, \alpha \, . \, \langle z, w\rangle \in \alpha \, .\supset . \, z = \alpha ` w.$

証明．第 2 の仮説よにり，$w \in \breve{\alpha}``\mho$. したがって，第 1 の仮説と 10.10 によって，$w \in \arg\alpha$. したがって，第 1 の仮説と 10.12 により，$z = \alpha ` w$.

10.13 には，$\arg\alpha$ の簡潔な表現が見られる．それに附随するあるものが次式である[1].

10.17　　$\mathrm{Func} \cdot \alpha \equiv (x)(\alpha``\{x\} \subseteq \{\alpha ` x\}).$

証明．$\mathrm{Func} \cdot \alpha$ と仮定しよう．10.10 により，いかなる $x \in \breve{\alpha}``\mho$ に対しても，$x \notin \arg\alpha$, したがって，10.13 により，$\alpha``\{x\} = \{\alpha ` x\}$；そして，いかなる $x \notin \breve{\alpha}``\mho$ に対しても，$\alpha``\{x\} = \Lambda$. どちらにしても，$\alpha``\{x\} \subseteq \{\alpha ` x\}$. 逆に，もし

1　これは William C. Waterhouse に負う．

$$(x)(\alpha``\{x\} \subseteq \{\alpha`x\})$$

なら，

$$(x)(y)(z)(\langle y, x\rangle, \langle z, x\rangle \in \alpha \,.\supset.\, y, z \in \{\alpha`x\}$$
$$\supset.\, y = \alpha`x = z)$$
$$\supset.\, y = z),$$

したがって，10.1により，Func$`\alpha$.

つぎに，それほど一般的でない二・三の事柄.

10.18 $x \in \arg \beta \,.\supset.\, (\alpha|\beta)`x = \alpha`(\beta`x)$.

証明. 10.11により，

$$(\alpha|\beta)`x = (\imath y)(\langle y, x\rangle \in \alpha|\beta)$$

(9.13, 9.5により) $= (\imath y)(\exists z)(\langle y, z\rangle \in \alpha \,.\, \langle z, x\rangle \in \beta)$

(仮説と10.12により) $= (\imath y)(\exists z)(\langle y, z\rangle \in \alpha \,.\, z = \beta`x)$

(6.1により) $= (\imath y)(\langle y, \beta`x\rangle \in \alpha)$

(10.11により) $= \alpha`(\beta`x)$.

10.19 $I`x = x$.

証明. 9.15と9.5により，$\langle x, x\rangle \in I$. したがって，10.4と10.16により，$x = I`x$.

10.20 $\Lambda`\alpha = \Lambda$.

証明. 6.14により，$\langle y, \alpha\rangle \notin \Lambda$. それゆえ，$\sim(x)(\langle x, \alpha\rangle \in \Lambda \,.\equiv.\, x = y)$. したがって，10.11と8.22により，$\Lambda`\alpha = \Lambda$.

関数適用の手段が依存している単称記述の手段は，クラスと関係の仮理論の範囲を出ない. たしかに，私はそれをその範囲外の概念：クラスのクラスのメンバーの合併という概念，によって定義した. だが，それはまた，量化，真理関数および同一性と同等のものを自由に使えるいかなる理論の言葉でも文脈的に定義されうる. そのやり方は，1905年ラッセルによって発表され，大抵の論理学の学生に親しまれている. 私が§8のより高価につく方法を提出したのは，その方法の方が簡単にゆくからであり，それに必要な手段はとにかく準備されていた. 関数適用が前もって§3で述べられなかったのは，このためにすぎない.

つぎにわれわれが検討する概念は，もっとしっかりした理由：つまり，そのほとんどすべてのケースは(まもなく見るであろうように)仮理論にとっては無意味であったろう，という理由，からして§3では省かれていた. それは**関数抽象**(*function abstraction*)の概

念で，たぶん最初にフレーゲによって明白にされたものである．量化，記述およびクラス抽象のように，関数抽象は変項束縛的な接頭辞を使う；私は，チャーチ(Church)に従って，接頭辞を「λ_x」とする．だが，量化の接頭辞が文を作り出すために文に附着し，記述とクラス抽象のそれが項を作り出すために文に附着するのに反し，関数抽象の接頭辞は項を作り出すために項に附着する[2]．「$\ldots x \ldots$」が「x」を自由変項として含むある項を表わす場合，$\lambda_x(\ldots x \ldots)$ は，独立変項 x のおのおのに対する値が $\ldots x \ldots$ であるような関数である．かくして，$\lambda_x(x^2)$ は，関数『の平方』である．一般に，

10.21　　「$\lambda_x(\ldots x \ldots)$」は「$\{\langle y, x\rangle : y = \ldots x \ldots\}$」を表わす．

これまでの定義は，「$y=$」を，その後にくるものが量化可能な変項かクラス抽象体であるときにかぎって，説明している．そこで，10.21 は本質的に三つのケースを含んでいる：

$$\lambda_x x = \{\langle y, x\rangle : y = x\} = I, \qquad \lambda_x z = \{\langle y, x\rangle : y = z\} = \{z\} \times \mathcal{V},$$

そして，一般的なケース：

$$\lambda_x\{z : Fxz\} = \{\langle y, x\rangle : y = \{z : Fxz\}\}.$$

この最後は，もちろん，この記法の適用される大抵の場合に及んでいる，そして，なぜこの記法が§3においてではなくむしろ今になって導入されるかが，これから分るのである．§3の段階では，変項「y」とクラス抽象体のあいだの「$=$」にはなんの意味も与えられていなかった．

一般的な便法 10.21 を表わす際に，不体裁にも，点「… …」に頼る理由は，もし，むしろ：

$$「\lambda_x \alpha」は「\{\langle y, x\rangle : y = \alpha\}」を表わす$$

と書いたならば，ここの「α」が「x」を自由変項として含む項であるとみなされる権利はなかったであろうからである(§1参照)．10.21 のようにして，われわれは，「$\ldots x \ldots$」を，「x」を自由変項として含む(だが，やはり「y」を自由変項としては含まない)項とみなすことができる．

そこで，二・三の定理型が結果する．

2　Frege と Church にとっては，それはまた文にも附着し，それによってクラス抽象と重複している；だが，これがおこるのは，これらの著者達が論理学と集合論に対して文が項に，クラスが関数に同化されるような特別のアプローチを採用しているからにすぎない．

10.22　　$\text{Func}\, \lambda_x(\ldots x\ldots)$.

証明. 6.7により,

$$(y)(z)(w)(y = \ldots w\ldots . z = \ldots w\ldots . \supset . y = z).$$

すなわち, 10.21と9.5により,

$$(y)(z)(w)(\langle y, w\rangle, \langle z, w\rangle \in \lambda_x(\ldots x\ldots) . \supset . y = z),$$

q. e. d. (10.1参照).

10.23　　$\ldots y\ldots \in \mho . \equiv . y \in \arg \lambda_x(\ldots x\ldots)$.

証明[3]　6.9により,

$$\ldots y\ldots \in \mho . \equiv (\exists z)(z = \ldots y\ldots)$$

(10.21, 9.5により)　$\equiv (\exists z)(\langle z, y\rangle \in \lambda_x(\ldots x\ldots))$

$\equiv . y \in \breve{\ } \lambda_x(\ldots x\ldots)``\mho$

(10.22, 10.10により)　$\equiv . y \in \arg \lambda_x(\ldots x\ldots)$.

混乱させる括弧の群は, もし次の簡単な規則を銘記すれば, 回避できる: 単項演算子, たとえば, 否定または補の記号〔「$^-$」〕, 逆の記号〔「$\breve{\ }$」〕, 関係部分の小点〔「$\cdot$」〕, 関数抽象の「λ_x」は, 通常, それに続く文法的に可能な字句の最小部分を支配するものと解釈する. かくして, 上の証明の最後から2番目の行にある長い項は, 関数 $\lambda_x(\ldots x\ldots)$ の右域を表わしているものと解さるべきである. 次の三つの項はみな意味を異にする.

$$\breve{\ }\lambda_x(\ldots x\ldots)``\mho, \qquad \breve{\ }\lambda_x((\ldots x\ldots)``\mho), \qquad \breve{\ }(\lambda_x(\ldots x\ldots)``\mho).$$

おなじ規則が, $\lambda_x(\ldots x\ldots)$ の y への適用に関する次の定理型の読み方を支配している.

10.24　　$\ldots y\ldots \in \mho . \supset . \lambda_x(\ldots x\ldots)`y = \ldots y\ldots$.

証明. 仮説と10.23により,

$$y \in \arg \lambda_x(\ldots x\ldots).$$

したがって, 10.14により

$$\langle \lambda_x(\ldots x\ldots)`y, y\rangle \in \lambda_x(\ldots x\ldots).$$

すなわち, 10.21と9.5により,

$$\lambda_x(\ldots x\ldots)`y = \ldots y\ldots.$$

関数抽象の有効なケース, そして $\lambda_x x\,(=I)$ および $\lambda_x z\,(=\{z\}\times\mho)$ についてもっとも

3　Charles L. Getchell によって短縮された.

単純なケースは，単一クラス関数：

10.25　　「ι」は「$\lambda_x\{x\}$」を表わす

である．これに関係するいくつかをつぎにあげる．

10.26　　$\iota`x = \{x\} \neq \Lambda.$　　**証明**は 10.24, 7.12, 7.6 による．

10.27　　$x \in \arg \iota.$　　**証明**は 10.23 と 7.12 による．

10.28　　$\langle\{x\}, y\rangle \in \iota \,.\!\equiv\!.\, x = y.$

証明．9.5 および定義 10.21 と 10.25 により，

$$\langle\{x\}, y\rangle \in \iota \,.\!\equiv\!.\, \{x\} = \{y\}$$

(7.7 により)　$$\equiv .\, x = y.$$

10.29　　$\breve{\iota}`\{x\} = x.$

証明．定義により，

$$\breve{\iota}`\{x\} = (\imath y)(\langle\{x\}, y\rangle \in \iota)$$

(10.28 により)　$$= (\imath y)(x = y)$$

(8.21 により)　$$= x.$$

IV. 自　然　数

11. 解釈されていない数

クラス——対のクラスを含めて——の上へ量化することの効用は，われわれが数をとり扱う段になると，一層しばしば，また，一層緊急の度をまして例示される．数はクラスを強く要求するので，集合論の現代史は，主として，数にまつわるトラブルの歴史である．いまは，クラスが数のとり扱いにおいてどのように利用されるかを考察することからはじめよう．

この章での数(*numbers*)は，自然数：0と正の整数，だけを意味することにする．暫らくのあいだ，それらを特定化されていない種類のものとして受けいれよう．0は，その名前だけが与えられており，かつ，おのおのの数 x に対して，$\mathrm{S}‘x$ が $x+1$ であるような後続者関数(successor function) S が与えられているものと仮定しよう．また，すべての数が量化の変項の値として認められていると仮定しよう，だが，変項の値が数に限定されているとは仮定しない．問題：自然数のクラス N を定義すること．

フレーゲ(1879, 1884)は，§4のはじめの方で記した「x は y の祖先である」の彼の定式法に従って，クラスの実理論の助けをかりてこの問題を解決した．y の祖先は，初期条件「$y \in z$」と，α が親関係であるときに「$\alpha“z \subseteq z$」に等しいところの閉包条件とを満足するすべてのクラス z の共通なメンバーであった．さて，同様に，数は，初期条件「$0 \in z$」および閉包条件「$\mathrm{S}“z \subseteq z$」を満足するすべてのクラス z の共通なメンバーとして記述されうる．N は，

(i)　$$\{x : (z)(0 \in z \,.\, \mathrm{S}“z \subseteq z \,.\!\supset\!.\, x \in z)\},$$

あるいはもっと簡潔に，

$$\cap\{z : 0 \in z \,.\, \mathrm{S}“z \subseteq z\}$$

である．

あらゆるものがクラスである(個体は自分自身の単一クラスとみなされる)という意味でなければ，数がクラスであるとは，われわれはまだいっていない．N が実クラスであるともいっていない；それは(i)の下では単に仮クラスでもありうる．しかし，注意すべき点は，束縛変項「z」の値としてのクラスに訴えることによって，「$x \in \mathrm{N}$」を与えていることである．ここでもまた，祖先の例や順序対およびその他の多くのものにおけるとおなじ

ように，クラスの実理論はわれわれに瘤をひとつのりこえさせるのである．

だが，ここではクラスへの要求は大きい．もし定式(i)がその目的を達成すべきであるならば，無限クラスが要求される．もし無限クラスが存在しないならば，$0 \in z$ かつ $\mathrm{S}``z \subseteq z$ なるいかなる z も存在しない(なぜなら，そのようないかなるものも無限であろうから)，したがって，このようなクラスはないのだから，空虚な意味で，あらゆるもの x がそのようなすべてのクラス z に属するであろう．(i)に述べられたクラスは，$\mho$ (=$\cap\Lambda$；8.15参照)，つまり，N に対する不十分な試みであろう．人間の祖先のクラスは有限であるから，有限クラスの存在一般を仮定すれば，これと同様な困難は祖先の例ではおきない．

§12では，いくつかの自然数がそれ自身有限クラスとして解釈されうるのを見るであろう．トラブルというのは，もしこれに加えて無限クラスを仮定することがなければ，「N」の表現(i)が，N に自然数およびそれ以外のあらゆるものもまた含ませてしまうということにほかならない．また，N が，そのときに，それ自体無限クラスであると抗議されてもならない；なぜなら，それは仮クラスであるから．もし無限クラスが存在しなければ，もちろん $\mathrm{N} \notin \mho$ である．

幸いなことに無限クラスのこの必要をごまかすことができる．(そうはできないような，無限クラスを必要とする他の場合もあろう．) (i)を次のように反転しさえすればよい：

$$\text{(ii)} \qquad \{x:(z)(x \in z \,.\, \breve{\mathrm{S}}``z \subseteq z \,.\supset.\, 0 \in z)\}.$$

クラス z がここで適当なものであるためには，それが無限である必要はない．0 を含み，かつ，S に関して閉じている(i)におけるようなどのクラスも，いつまでも先に進んでゆかねばならなかった．だが，任意のある自然数 x に対して，(ii)におけるようなクラス z は，正の x 箇のメンバーと 0 と以上には，かくして $x+1$ 箇以上のメンバーを，含む必要はない．もしあらゆる自然数 x が(ii)によって定義された N の中に入りこめるならば，たしかに，「z」の値としてだんだん大きくなるクラスが果てしなく存在し続けねばならないであろう；だが，それらのクラスはすべて有限でありうる[1]．

1 無限クラスなしに数論をうる色々な方法が知られている．Martin と Myhill による数論の構成は，おそらく，境い目のケースである，というのは，彼らが普通は無限クラスに基づけられるであろうような法則に従っている祖先関係(§15)の観念を仮定しているからである．だが，Bernays, 1941, 11ページ，によって示された方法はあきらかにその資格をもっている．また，Grelling, 12ページ以下，によって明らかにされたように，Zermelo の 1909 年の方法もそうである．また，Wang, 1958, 491ページ，によって発表されたように Dummett の方法もそうである．私の反転についての今の方法はといえば，それがこれらさまざまな他の手段よりも簡単にみえるとだけいっておこう．ちなみに，これに関する 1961 年の私のノートは訂正を要する：つねに公理型であったもの，すなわち以下の 13.1 を私は不注意にもその中で公理として表現した．

算術の定理を証明する際に，有限または無限クラスの存在の問いに出会うのは，**数学的帰納法**(*mathematical induction*)の法則の正当化においてである．もしあることが0について真であり，かつ，それがある数について真であるときにいつでもその次の数についても真であるならば，それはすべての自然数について真である：これがその法則であり，自然数の理論におけるもっとも重要な証明技術である．図式的には：

$$\begin{aligned}&F0\,.\\&(y)(Fy \supset F(\mathrm{S}`y))\,.\\&x \in \mathrm{N}\,.\\&\qquad \supset Fx.\end{aligned}$$

普通のように，N が(i)のように定義されるとき，この法則の正当化は次のようになる．第3の前提により，$x \in \mathrm{N}$. したがって定義(i)により，x は，(第1の前提によって，$\{y: Fy\}$ がそうであるように) 0 を含みかつ (第2の前提によって，$\{y: Fy\}$ がそうであるように) S に関して閉じているあらゆるクラス z のメンバーである．したがって，$x \in \{y: Fy\}$, q. e. d. だが，この議論は $\{y: Fy\}$ の存在に依存しており，これらの前提の下では $\{y: Fy\}$ は無限でなければならない．

さて，対照的に，N が(ii)によって定義されるとき，数学的帰納法のおなじ図式がどのようにして正当化されるかを見よう．第3の前提(「$x \in \mathrm{N}$」)と(ii)により，0は，$x \in z$ かつ $\breve{\mathrm{S}}``z \subseteq z$ なるあらゆるクラス z に属する．z を，$\sim Fy$ なる0から x までの数 y の有限クラスにとろう．帰納法の図式の第2の前提は，

$$(y)(\sim F(\mathrm{S}`y) \supset \sim Fy)$$

を含意し，かくして，いましがた選ばれた z について，

$$(y)(\mathrm{S}`y \in z \,.\!\supset\!.\, y \in z)$$

を，すなわち，$\breve{\mathrm{S}}``z \subseteq z$ を含意する．したがって，もし $x \in z$ ならば，$0 \in z$ とならざるをえない．しかるに，第1の前提(「$F0$」)によって $0 \notin z$；したがって $x \notin z$, これは Fx にほかならない，q. e. d. かくして，有限クラスで十分である．

私はまだ S を定義していなかった；任意の自然数に適用されて，それがその次の自然数を与える，といっただけであった．S のありうる定義は，自然数の範囲外での補足的な解釈を S に与えて，0 または他の自然数に自然数以外のあるものに対して S という関係

をもたせるようにするかもしれない．この場合には，前の段落の結論は保証されないであろう．だが，ここでは，モラルは単純である：任意の自然数を自然数以外のものの後続者とするようにSを定義してはならない．そして，事実，Sを解釈する三つのもっともよく知られている方法は，Sを，数的であろうとその他のものであろうと，すべての種類の事物に適用して説明しながらも，すべて，このモラルにかなっている．われわれは，これらの表現法を§12で見るであろう．

Nを(ii)によって定義することは，ひとつの点で，不必要なまでに特殊である．もし「0」のかわりに「y」を用いるなら，(ii)において量化された式は自然数に対する「≦」を定義するのに役だつ：

(iii) $$y \leqq x \,.\!\equiv (z)(x \in z \,.\, \breve{\mathrm{S}}``z \subseteq z \,.\!\supset\!.\, y \in z).$$

すると，とくに

(iv) $$\mathrm{N} = \{x : 0 \leqq x\}.$$

ついでに，われわれは，「$y<x$」を「$\mathrm{S}`y \leqq x$」として定義できるし，それから「$x \geqq y$」を「$y \leqq x$」として，「$x>y$」を「$y<x$」として定義できる．

自然数の本来の使用は，多(multiplicity)の尺度としてである．数 x のこの使用は，「α は x 箇のメンバーをもつ」という慣用句に要約されている．さて，そのプラン：

α は 0 箇のメンバーをもつ $\equiv . \alpha = \Lambda$,

α は $\mathrm{S}`x$ 箇のメンバーをもつ $\equiv (\exists y)(y \in \alpha \,.\, \alpha \cap -\{y\}$ は x 箇のメンバーをもつ$)$

は，それをフレーゲに負うが，特定のおのおのの自然数にいたるまで，一歩一歩，「α は $\mathrm{S}`0$ 箇のメンバーをもつ」，「$\alpha$ は $\mathrm{S}`(\mathrm{S}`0)$ 箇のメンバーをもつ」，等々，を翻訳することを可能にする；だが，それは，量化可能な変項「x」を有するところの「α は x 箇のメンバーをもつ」を消去することを可能にはしない．それも，また，フレーゲが知っていたように，消去できるが，他の方向に沿ってはじめてできるのである．ひとつの迅速な方法は次の通りである．

カントールに従って，「$\alpha \preceq \beta$」あるいは「α は β より多くのメンバーをもつことはない」を，α のメンバーが余すところなく β のメンバーに割りあてられ，どの二つもおなじものに割りあてられることはない，ことを意味するとして説明できる．すなわち，

11.1 「$\alpha \preceq \beta$」は「$(\exists x)(\mathrm{Func}\, x \,.\, \alpha \subseteq x``\beta)$」を表わす．

このとき，α と β はサイズがおなじであるということは，$\alpha \preceq \beta$ かつその逆をいうことである.

11.2　　「$\alpha \simeq \beta$」は「$\alpha \preceq \beta \preceq \alpha$」を表わす.

さて，クラスのサイズを数によって測るための残っているステップは，数えるということによって示唆される：クラスは，それが $x>$ なる箇数のクラスとちょうどおなじ大きさであれば，x 箇のメンバーをもつ.（x まで数えるという伝統的な形式は，この用法では，0 から始め，したがってちょうど x をのぞいてやめるという小さな点でゆがめられている.）したがって，われわれは，「α は x 箇のメンバーをもつ」の表現として，「$\alpha \simeq \{y: y<x\}$」を有する[2]. この圧縮された表現において，最終的には，考慮に入れられるべき「S」のどの定義も，ある自然数が自然数以外のいかなるものに対してもSなる関係をもたないようにするという仮定に私が再び依存しているということに注意しよう；さもないと，たとえ x 自身が自然数であろうとも，「$\{y: y<x\}$」中に文節「$y \in \mathrm{N}$」を必要とするであろう.

「α が x 箇のメンバーをもつ」の定式化「$\alpha \simeq \{y: y<x\}$」を成しとげるのに，クラスの実理論を二通りの仕方で利用しなければならなかった. α 自身の実在性は要求されていないし，「$<$」を定義するのに用いられているSの実在性も要求されていない. だが，「$<$」の定義は「$\leqq$」を利用し，「$\leqq$」の定義は，(iii)に見られるような仕方で，クラスの上への量化を含んでいる；そして「$\simeq$」の定義も「$\preceq$」を利用し，これの定義は順序対のクラスの上への量化に依存している. それでも，このようにして要求されたクラスは有限クラスだけである. これは(ii)との関連で見られたし，「$\preceq$」の場合も，それはすぐ理解されよう；なぜなら，$\alpha \simeq \{y: y<x\}$ なるためには，11.1 と 11.2 によって，$a_1, \ldots, a_x \in \alpha$ なる x 箇の対 $\langle a_1, 0\rangle$, $\langle a_2, 1\rangle$, …, $\langle a_x, x-1\rangle$ を含む関数と x 箇の逆の対を含む関数だけが必要である.

さて，和，積および巾についてはどうか？　よく知られている，いわゆる回帰的定義(recursive definition)もしくは**回帰法**(*recursion*)がある：

$$x+0=x, \qquad x+\mathrm{S}`y=\mathrm{S}`(x+y);$$
$$x\cdot 0=0, \qquad x\cdot(\mathrm{S}`y)=x+x\cdot y;$$
$$x^0=\mathrm{S}`0\,(=1), \qquad x^{\mathrm{S}`y}=x\cdot x^y.$$

2　Dedekind, 1888, §14 も同様である.

最上段の一対の等式によれば，「$x+\mathrm{S}`(\mathrm{S}`(\mathrm{S}`0))$」にほかならない「$x+3$」から「＋」を四段階で完全に消去できる；全体は「$\mathrm{S}`(\mathrm{S}`(\mathrm{S}`x))$」となる．任意の特定の数字がそれに続いている「$x+$」に対しても同様である．だが，そのときには，量化可能な「y」を有する「$x+y$」から「＋」を消去することはできない．2番目の対は，「$x\cdot 3$」から「$\cdot$」を四段階で完全に消去するのに役だち，それは「$x+(x+(x+0))$」を結果し，これが，こんどは，「$x+(x+x)$」に帰着する；だが，そのとき，「＋」そのものの消去は存在しない．また，2番目の対は「$x\cdot y$」から「$\cdot$」さえ消去することはないであろう．これらの回帰法は，文字が数字を表わす型文字と考えられるかぎり，紛れもなく消去的定義であるが，文字が量化可能な変項と考えられるときにはそうでない．

しかしながら，いったん**反復**(*iterates*)，あるいは**関係の巾**(*powers of relations*)を定義すると，後者の性格における真正の定義が与えられうる．私が反復というのは，曽祖父母の関係は親関係の第3の反復であるという意味においてである．なんらかの関係 z のゼロ反復，$z^{|0}$，は I である；最初の反復，$z^{|1}$，は z 自身である；第2の反復，$z^{|2}$，は $z|z$ である；第3の反復，$z^{|3}$，は $z|z|z$ である；等々．いったんこの概念が手もとにあると，上の回帰法を次のように直接的定義に還元できる：

$$\text{(v)}\qquad x+y=\mathrm{S}^{|y}`x,\qquad x\cdot y=(\lambda_z(x+z))^{|y}`0,\qquad x^y=(\lambda_z(x\cdot z))^{|y}`1.$$

だが，反復をどのようにして定義するか？　いましがた私はまたしても回帰法によって定義した，事実：

$$\text{(vi)}\qquad z^{|0}=I,\qquad z^{|\mathrm{S}`y}=z|z^{|y}.$$

反復の概念によって，算術の和，積および巾に対する回帰法を直接的定義に変形できたが，何が反復に対する回帰法を直接的定義に変形しうるようにしてくれるであろうか．答：**有限系列**(*finite sequence*)の概念．

有限系列にとって問題なのは，それが重複を排除しないで，最初の(あるいは，いうなれば，ゼロ番目の)ものをもち，最後のものにいたるまで，その次，その次，等々，をもつことである．したがって，系列を，単に，その独立変項が0からある n までの『列をなす数』(serial number) であり，またその値——$w`0$, $w`1$, …, $w`n$——が系列の『中』のものであるような関数 w，として描いてよい．かくして

$$\text{(vii)}\qquad \mathrm{Seq}=\{x\colon \mathrm{Func}\,w\,.\,(\exists y)(\breve{w}``\mho=\{z\colon z\leqq y\})\}.$$

系列は順序対の有限クラスとなる．いまや，y 番目の反復の一般的な概念 $z^{|y}$ を完全に定

義できる．それは，ある系列 w に対して，h が $w`y$ で $k$ が $w`0$ であり，かつ系列 w の『中』のおのおのの後続者はその前にあるものに対して z という関係にある場合に，h の k に対する関係である．すなわち，簡潔には，

(viii)　　$z^{|y} = \{\langle h, k\rangle : (\exists w)(w \in \mathrm{Seq} \,.\, \langle h, y\rangle, \langle k, 0\rangle \in w \,.\, w|\mathrm{S}|\breve{w} \subseteq z)\}$.[3]

(iii)—(v)，(vii)および(viii)で輪郭を描いた定義は，12.1, 12.3, 16.1—3, 14.1—2 でそれらの最終的な定式化をうるであろう．

12. 解釈された数

きちんと番号のついているわれわれの定義は，量化，真理関数および述語「ϵ」だけを結局のところ含む原初的な記法でいい表わされた表現の，省略形としての記法を導入してきた．一時的なローマ数字で述べられた，§11 の定義は，定義されていない補足的な記法としての「0」と「S」に基づいていた；そして，それらが算術の演算，数(「N」)の観念およびクラスのサイズの観念に適合しているのが分った．われわれがつぎに見るであろうことは，これらの基礎的な記法を還元して，「0」と「S」とをとり除くことができる，ということである．

われわれは，数をわれわれの量化の変項の値の範囲に認めてきたが，数がいかなる種類のものであるべきかはまだ考察していなかった．「0」と「S」とが与えられるときに，「N」をどのように定義すべきかは，たしかに見てきた；こんどは，「0」と「S」とを解釈するということが，数の観念を固定するために，いま，必要とされることなのである．

どのような対象にしても，それに対して算術の演算が定義され，算術の法則が保存されるかぎり，数として役にたつであろう．ときどき，次のように強く主張されてきた，それ以上のことが必要なのだ：純粋算術を説明するというのでは十分でない，われわれは，また，数を多の測定に適用することをも説明しなければならない．しかし，この立場は，それがもうひとつの立場に反対しているのだと考えられているかぎりでは，誤まっている．数が何であるかをまだ決定することなしに，算術的演算のみならず，総数概念(*Anzahlbegriff*)，「α が x 箇のメンバーをもつ」をもどのようにして定義しうるかをわれわれは見てきたのである．

3　(v)—(viii)の構成全体は，次の点をのぞいて，Dedekind, 1888, §§ 9, 11—13 にある．彼のその段階の分け方は異なっており，したがって，彼は $z^{|y}$ および Seq という概念をすべてこの方法に沿って抜きだしてはいない．系列のこの表現法は，Whitehead, 1903, 158 ページ以下に負う．

0をわれわれの好きなどんなものととることも自由であり，Sを，単にくりかえし0に適用されるとき以後のあらゆる適用においてなにか違ったものを産みだすような関数であるかぎりにおいては，われわれの好きなどんな関数と解釈しても自由である．たとえば，ツェルメロ(1908)とともに，0を任意にΛにとり，それから，$S`x$を，おのおのの$x$に対して$\{x\}$にとってもよい．数は$\Lambda$, $\{\Lambda\}$, $\{\{\Lambda\}\}$, 等々，となる．それとは違って，フォン・ノイマン(1923)とともに，各自然数をそれ以前のすべての数のクラスにとってもよい；すると，0は再び$\Lambda$となるが，$S`x$は$\{x\}$ではなく$x \cup \{x\}$になる．とくに，このとき，1は再び，ツェルメロにおけるごとく，$\{\Lambda\}$であるが，2は$\{0, 1\}$あるいは$\{\Lambda, \{\Lambda\}\}$となる；3は$\{0, 1, 2\}$あるいは$\{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\}$となる；等々．一般に，フォン・ノイマンにとっては，すべての自然数xに対して，$x = \{y : y < x\}$あるいは$y < x \,.\!\equiv\!.\, y \in x$である．

数のフォン・ノイマン版は，数えることとのより密接な関係のゆえに，ツェルメロ版よりもいっそう自然であると見なされる．αのx箇のメンバーを数える際，われわれはそれらを，それぞれ，最初のx箇の数に結びつける；そして，これらの数は，フォン・ノイマンにとって，単にxのメンバーなのである．フォン・ノイマンにとっては，αがx箇のメンバーをもつということは，$\alpha \simeq x$をいうことである．フォン・ノイマンにとっては，$x = \{y : y < x\}$なので，事実，これが，再び，ちょうど§11の「$\alpha \simeq \{y : y < x\}$」であることに注意しよう．

多の尺度としての数に専心していたフレーゲは，1884年に，おのおのの数を，事実上，その箇数のメンバーをもつすべてのクラスのクラスとして解釈した[1]．それゆえ，彼にとっては，0はΛというよりはむしろ$\{\Lambda\}$であり，$S`x$は

$$\{z : (\exists y)(y \in z \,.\, z \cap {}^{-}\{y\} \in x)\}$$

である．フレーゲにとっては，誰にとってもそうであるように，「αがx箇のメンバーをもつ」は，「$\alpha \simeq \{y : y < x\}$」によって十分に表現される，だが，フレーゲにとっては，$\alpha \in \mho$ (6.12参照)であるかぎり，それはまた，より簡潔に「$\alpha \in x$」としても表現できる(6.12参照)．

1 Russellによって単純化されたときにはじめて，Frege版は完全にこのことをなし遂げたのであった．Frege版に加わっていた複雑さは，しかしながら，彼の論理体系の一般的な特性にかかっているにすぎず，自然に消えうせてしまった；したがって，公平なところ，この表現をやはりFrege版といってよいと私は思う．Russellはそうした(1919, 11ページ)．

数のこれら三つの表現法のあいだでは，あいまいさを適当な修飾語句によって除去しさえすればよい．三つのうちのどれも，通常そうよばれている数の目的に適合しうることは分っている；そして，おなじことが，無限に多くの他の表現法にもいわれよう．

§11で，「0」と「S」が与えられて「N」を定式化する際，クラス，ともかく有限のクラスの上への量化の必要をわれわれは認めた．おなじことが，「$x+y$」，「$x \cdot y$」および「x^y」を定義するのに用いられた反復，もしくは関係の巾を定義する際にも，再び必要となった．また，「α は x 箇のメンバーをもつ」を定式化するのに，対の有限クラスの上へ量化した，なぜなら，これは 11.1 に依存していたからである．だが，いまでは，実クラス，そして，事実，有限クラスは，ただ，〔自然〕数論に必要な補助物というだけではないことが分る；(数を無限クラスにするフレーゲ方式で数を考えるのでなければ) それらは〔数論〕全体に対して十分なのである．

したがって，われわれの記号の目録は，いまでは再び，量化子と変項，真理関数記号，および「ϵ」とに還元される．このようなものがクラスの理論の原初的記法であり，そして，いまでは，どのようにしてそれが算術の基礎的な目的にもかなうかが，分っているのである．

はじめに，定義を参照用に組織づけよう．0 と S についてはツェルメロ版を，すなわち，Λ と ι を用いる．それから，(iii)，(iv) およびそれらの続き (§ 11) をそれに合わせると，われわれがうるのは：

12.1　「$\beta \leqq \alpha$」あるいは「$\alpha \geqq \beta$」は，「$(z)(\alpha \in z \,.\, \breve{\iota}``z \subseteq z \,.\supset.\, \beta \in z)$」を表わす．

12.2　「$\beta < \alpha$」あるいは「$\alpha > \beta$」は，「$\{\beta\} \leqq \alpha$」を表わす．

12.3　「N」は「$\{x: \Lambda \leqq x\}$」を表わす．

つぎに，「$\leqq$」によって表現される関係が反射的で推移的であることを見る．

12.4　$x \leqq x.$　　**証明**は 12.1 による．

12.5　$x \leqq y \leqq z \,.\supset.\, x \leqq z.$

証明．仮説と 12.1 により，

$$(w)(y \in w \,.\, \breve{\iota}``w \subseteq w \,.\supset.\, x \in w : z \in w \,.\, \breve{\iota}``w \subseteq w \,.\supset.\, y \in w).$$

したがって，

$$(w)(\breve{\iota}``w \subseteq w \,.\supset: z \in w \,.\supset.\, y \in w : y \in w \,.\supset.\, x \in w)$$

$$\supset : z \in w . \supset . x \in w).$$

すなわち，12.1 により，$x \leqq z$.

次式は，x が，われわれにとっては $\{x\}$ であるところの S‘x より大きくはない，ことをいっている.

12.6 $$x \leqq \{x\}.$$

証明. 定義により，$\langle x, \{x\} \rangle \in \breve{\iota}$. したがって，

$$\{x\} \in z . \supset . x \in \breve{\iota}``z$$
$$\supset : \breve{\iota}``z \subseteq z . \supset . x \in z,$$

q. e. d. (12.1 参照).

事実，それはより小さい.

12.7 $$x < \{x\}.$$

証明: 12.4 の「x」に「$\{x\}$」; 12.2 参照.

その他の容易な帰結:

12.8 $$x < y \leqq z . \supset . x < z.$$ **証明**は同様に 12.5 から.

12.9 $$x < y . \supset . x \leqq y.$$

証明. 12.6 と 12.5 により，$\{x\} \leqq y . \supset . x \leqq y$, q. e. d. (12.2 参照).

12.10 $$x < y < z . \supset . x < z.$$ **証明**は 12.8, 12.9 による.

より実質的な定理は，$x \leqq y$ なるとき，もし y が後続者(すなわち，単一クラス)でなければ，$x = y$ ということである.

12.11 $$x \leqq y . \supset : x = y . \vee (\exists z)(y = \{z\}).$$

証明. $x \leqq y$ かつ $(z)(y \neq \{z\})$ と仮定しよう; $x = y$ を証明する. $x \leqq y$ なので，12.1 により，

$$(w)(y \in w . \breve{\iota}``w \subseteq w . \supset . x \in w). \qquad [\mathrm{i}]$$

$(z)(y \neq \{z\})$ なので，y は ι という関係をもたない. したがって，$\breve{\iota}``\{y\} = \Lambda$. それゆえ，$\breve{\iota}``\{y\} \subseteq \{y\}$. だが，また $y \in \{y\}$. ゆえに [i] により，$x \in \{y\}$. すなわち，$x = y$.

N についての定理へ進む際には，なによりもまず，「$w \leqq x$」および「$x \in \mathrm{N}$」の双方を

より完全に書き出すのが便利である：

12.12 $w \leqq x . \equiv (z)(x \in z . (y)(\{y\} \in z . \supset . y \in z) . \supset . w \in z).$

証明. 定義により，

$$w \leqq x . \equiv (z)(x \in z . (u)(y)(u = \{y\} . u \in z . \supset . y \in z) . \supset . w \in z).$$

これは，6.2によって，12.12に帰着する.

12.13 $x \in \mathrm{N} . \equiv (z)(x \in z . (y)(\{y\} \in z . \supset . y \in z) . \supset . \Lambda \in z).$

証明は12.12, 12.3による.

それから，0は数であり，数の後続者は数であり，かつ，0以外のおのおのの数は後続者であるという趣旨の定理がくる.

12.14 $\Lambda \in \mathrm{N}.$

証明. 12.4により，$\Lambda \leqq \Lambda$，q. e. d. (12.3参照).

12.15 $x \in \mathrm{N} . \supset . \{x\} \in \mathrm{N}$　（すなわち，$\iota``\mathrm{N} \subseteq \mathrm{N}$).

証明[2]. 12.5と12.6により，$\Lambda \leqq x . \supset . \Lambda \leqq \{x\}$，q. e. d. (12.3参照).

12.16 $x \in \mathrm{N} . \supset : x = \Lambda . \vee (\exists y)(x = \{y\}).$　**証明**は12.11, 12.3による.

0について，さらに：

12.17 $x \leqq \Lambda . \equiv . x = \Lambda.$

証明. 10.26により，$\sim(\exists z)(\Lambda = \{z\})$. したがって，12.11により，$x \leqq \Lambda . \supset . x = \Lambda$. 逆は12.4による.

12.18 $\sim(x < \Lambda).$

証明. 12.17および12.2により，$x < \Lambda . \equiv . \{x\} = \Lambda$. したがって，10.26により，$\sim(x < \Lambda)$.

$\{x : x \leqq y\}$に対する簡潔な記法があれば便利であろう．yが数であろうとなかろうと，これは，12.1によって，yを含むクラスであり，もしそのようなものがあれば，yの唯一のメンバーを含むクラスであり，また，もしそのようなものがあれば，このクラスの唯一

2) Joyce Friedman 嬢によって短縮された.

のメンバーを含むクラスであり，等々，と下っていく．われわれにとってもっとも興味のあるケース，つまり，y が数である場合には，$\{x: x \leqq y\}$ は y をいれて y までのすべての数のクラスである．したがって，それを「$\{,,,y\}$」と書こう；これは型的(schematic)ではないが，型的な記法「$\{\ldots, y\}$」を思い起させているつもりである．

12.19　「$\{,,,\alpha\}$」は「$\{x: x \leqq \alpha\}$」を表わす．

ただちに，12.4 および 12.17 を次のように書きかえることができる：

12.20　$x \in \{,,,x\}$,

12.21　$\{,,,\Lambda\} = \{\Lambda\}$.

13. 帰 納 法

N の定義を反転することによって，当分，無限クラスなしですますことができた(§ 11)．0 を含み，かつ，それ自身のすべてのメンバーの後続者を含むクラスが無限にならざるをえないのに反し，x を含み，かつ，それ自身のすべてのメンバーの先行者(predecessor)を含むクラスは $x+1$ 箇以上のメンバーを含む必要がないというのがその理由であった．だが，それはそれだけの多さ〔のメンバー〕をもたねばならないであろう．したがって，クラスがどれぐらいの大きさまでありうるかについて，なんらかの有限の限界があるならば，ちょうど普通の定義が，無限クラスの存在しないときには，その目的を達成できないのとおなじように，われわれの反転した定義さえもまたその目的を達成できないであろう．二箇のメンバーだけまでのクラスを保証する貧弱な公理 7.10 は，いつでもより大きな有限クラスを保証するように補足されなければならないであろう．

その必要は，まず，とくに数学的帰納法を正当化する際に感じられる．その正当化は，N の定義の反転の後では，0 から x までの $\sim Fy$ なる数 y のクラスの存在(§ 11参照)，要するに，$\{,,,x\} \cap \{y: \sim Fy\}$ の存在に依存していた．このクラスは，実際，有限である．しかし，帰納法の正当化が一般的であるべきならば，そのクラスはあらゆる数 x と「Fy」の役割を果すあらゆる式に対して存在しなければならないであろう．したがって，われわれが必要とするのは，公理型としての：

$$x \in \mathrm{N} . \supset . \{,,,x\} \cap \alpha \in \mathfrak{V}$$

であるか，あるいは，これをそれから演繹できるような公理型である．

洗練という点から，私は仮定「$x \in \mathrm{N}$」をおとそう．$\{,,,x\}$ は，$x \in \mathrm{N}$ であろうとなか

ろうと，有限のままであると期待してよいからである．それはメンバーとして，x と，もしあるならば x のただひとつのメンバーと，そしてもしあるならばそれのただひとつのメンバー，等々，だけをもつのであり，そして，ついには Λ かあるいは多くのメンバーをもつクラスにつきあたる；そして，そんなふうに終ってはくれないということがありうるだろうか？　もし x が個体，すなわち，$x=\{x\}$ (§4参照)ならば，終ってはくれない；だが，この場合，$\{,,,x\}$ は x であり，したがって，なお有限であり，一箇のメンバーしかもたない．

あるいは，ι の一箇のステップにおいてではないが，やはり，次のような有限箇のステップにおいて，x からぐるりと一巡して x へ達することができる：つまり，x は自分自身の単一クラスの…の単一クラスである，と想像してみよう．すべてのこのような受けいれ難い循環的なケースは，個体のケース $x=\{x\}$ とともに，式「$x<x$」によって特徴づけられる(12.2, 12.1 参照)．そして，このようなすべての場合，$\{,,,x\}$ は，あきらかに，なお有限である．$\{,,,x\}$ の無限性は，むしろ，

$$x=\{y\},\ \ y=\{z\},\ \ z=\{w\},\ \ \ldots$$

と無限に，そして，$x, y, z, w, \ldots$ がすべて異なるような異常な状況である．簡潔には，それは $\{,,,x\}\subseteq\iota``\mho$ で，しかも $\sim(x<x)$ の場合である．

そのような x が存在することを否定する公理をつけ加えることもできた．だが，これは私の目的にそわない．無限クラスが存在しないという定理は私の望むところではない；反対に；VI章およびその先で，無限クラスがちゃんとした目的に必要であることを見るであろう．私は，無限クラスが存在することを積極的に仮定する前に，数論を基礎づけようとしているにすぎない．もし，$\{,,,x\}\subseteq\iota``\mho$ でかつ $\sim(x<x)$ というようないかなる奇妙な x も存在しないということに，ひとたび満足するならば，包括化の公理型としての「$\{,,,x\}\cap\alpha\in\mho$」の仮定は，この点ではまったく申し分がない；そして，事実，われわれはそれで満足する．そのような x が存在することの証明されうる危険はないし，そのような x が存在しないという公理にはなんの効果もないのである．

これまで擁護してきた「$\{,,,x\}\cap\alpha\in\mho$」という〔公理〕型は，他の点では不適当である．それは，x が数である場合，数のクラスだけを与える．x が数でないとしても，$\{,,,x\}$ および $\{,,,x\}\cap\alpha$ は非常に特殊な種類のクラス，単一クラスでないメンバーをたかだか一箇もつところの，奇妙に内に成長したクラスである．§11 の終りにある系列という仕事と 11.1 の関数のいくつかの仕事をするためには，やはり有限であるが，他の種類のクラ

スを必要とするであろう．その結果，この際，私が採用するであろう包括化の公理型は，「$\{,,,x\}\cap\alpha\in\mho$」ではなくて：

13.1　**公理型**　$\mathrm{Func}\,\alpha\supset.\alpha``\{,,,x\}\in\mho$

である．

この拡張版は，やはり，$\{,,,x\}$ より大きなクラスを要請してはいない；なぜなら，α は，関数であるから，$\{,,,x\}$ のメンバーのおのおのにせいぜいひとつのものを割りあてる．「$\beta\preceq\gamma$」のわれわれの定義(11.1)そのものは，カントールに従って，ある関数 z に対して $\beta\subseteq z``\gamma$ であったということが，事実，思いだされるであろう．ただし，13.1 には，なんらかのもの z が α である，つまり $\alpha\in\mho$ であるという要求はない．

公理型 13.1 は，$\mathrm{Func}\,\alpha\supset.\alpha``y\in\mho$ を事実上いっているところの**置換**(*replacement*)のよく知られた公理型によって暗示されている[1]．まず，なんらかのクラス y が与えられると，この後者の〔置換公理〕型は，y から，そのおのおののメンバーを，おなじであろうと異なろうと，任意のものに置きかえてえられるクラスの存在を要請する；よって，「置換」の名がある．13.1 は，置換公理型と，ポンプに呼び水をいれるべく，公理「$\{,,,x\}\in\mho$」とを仮定すればえられる．だが，13.1 そのものからは，置換の公理型に似た強さをうることはまったくない．後者は，条件づきで，無限クラスについて多くのことを決定する：もし無限クラス y があるなら，そのサイズの他のクラスも際限なくある．この点に関しては，13.1 は「$x\cup\{y\}\in\mho$」に比べてさえもはるかにつつましい[2]．

7.10 の「$\Lambda\in\mho$」の部分は，13.1 から証明できる；α を Λ にとりさえすればよい．「$\Lambda\in\mho$」が 13.1 に先だって仮定されたのは，叙述上の便宜のためにすぎない．変項に対

1　それは Fraenkel (1922) と Skolem (1923 年に刊行された 1922 年の論文) によって提出された．その名称(*Ersetzung*)は Fraenkel に由来する．このアイディアは，あるクラスはそれが現に存在するクラスとおなじサイズなら存在するという趣旨のインフォーマルな公理において，一部，Mirimanoff (1917) によってすでに用いられていた．Mirimanoff の公理とおなじ公理は，1932 年 (444 ページ) まで公刊されなかった Cantor の 1899 年の書簡にも現われていた．しかしながら，それから置換の公理型へ議論を進めるためには，(おなじように Cantor の書簡にあった) **分出**(*Aussonderung*)の原理のみならず，(これは書簡にはなかったが) 選択公理も必要である．ついでながらその原理の微妙な身分を公理型(*schema*)としてあきらかに定義したのは，Fraenkel と Skolem だけ，とくに Skolem であった——これは，もし私の α とよんだものに存在が帰せられるべきでないならば，本質的な点である．彼らの表現法は，仮クラスの方法を欠いていたため，「$\mathrm{Func}\,\alpha\supset.\alpha``y\in\mho$」ほど簡潔ではなかった；だが，それらはこれと等値であった．

2　vi ページ参照．それでも「$\{,,,x\}\in\mho$」は無視できない．Brown は，置換公理型を §38 におけるような Zermelo のすべての公理で補なってさえも，それが証明できないことを示した；それは基底づけ公理を待たなければならない，その公理に基づけば，Brown が示しているように，それはえられる．

して「Λ」,「$\{\alpha\}$」,「$\{\alpha, \beta\}$」および「$(\imath x)Fx$」の自由な代入を許す，54ページの贅沢な条項は，「$\Lambda \in \mathfrak{V}$」によるところ大きい；なぜなら，8.22における，また，7.12と7.13の証明における Λ の役割に注意されたい.

7.10のすべては，それゆえ「$\Lambda \in \mathfrak{V}$」と同様「$\{x, y\} \in \mathfrak{V}$」も，もし，13.1のかわりに，われわれがその変形：

$$\text{(i)} \qquad \text{Func}\, R \supset . R``\{,,,x\} \in \mathfrak{V}$$

をとるとすれば，余計となる．このことは，ブラウンが，さらにワンもまた，私に指摘してくれた．(i)においては，われわれは「α」のかわりに§3の「R」を有している；そこで，われわれは，「Func」と「R...」とを60ページ以下におけるようにではなく，22ページ以降現在におけるように読むとともに，また，12.1における「$\iota``z$」を「$\{w: \{w\} \in z\}$」と読みなおすことによって「$\{,,,x\}$」を〔順序〕対から切り離す，とする．

(i)から「$\Lambda \in \mathfrak{V}$」を証明するには，R を§3の $\Lambda \times \Lambda$，あるいは $\{zw: z \neq z\}$ ととればよい．つぎに，(i)における x と R を，Λ，および§3の I，もしくは $\{zw: z = w\}$ ととって，「$\{\Lambda\} \in \mathfrak{V}$」を証明する．最後に，(i)の x を $\{\Lambda\}$ と，また R を

$$\{zw: z = x \,.\, w = \Lambda \,.\mathbf{v}.\, z = y \,.\, w = \{\Lambda\}\}$$

ととって，「$\{x, y\} \in \mathfrak{V}$」を証明する．

同様の推論は，われわれが13.1それ自体から行なうときには，うまくゆかない，というのは，そのとき，われわれは9.5に依存するが，9.5は7.13に依存し，それゆえ，7.10に依存するからである．7.13は，48ページ終りで採用した便法の下では，2.1とともにひそかに9.5の証明中に入りこんでいる．

それゆえ，公理的理論の観点からは，集合論に対するわれわれの現在の基本的な基礎づけは，外延性の公理4.1と〔公理〕型(i)とをちょうどふくむものとみなされるのがもっともよい．他方，実際的ならびに教育的には，順序対はどのみち導入されねばならないのであるから，われわれが早くに順序対としての関係に満足して，§3のような仮の関係にそれ以上停滞しなかったのは，当をえていた．かくして，現行版4.1, 7.10, 13.1.

表面的には，11.1による「$\beta \preceq \gamma$」の定義は，β がある関数 z に対して $z``\gamma$ である，ということよりも広い；それはある関数 $z$ に対して $\beta \subseteq z``\gamma$ である，ということである．それに対応する13.1の拡張は便利であって，次のようにして確立できる．

$$\textbf{13.2} \qquad \text{Func}\, \alpha \,.\, \beta \subseteq \alpha``\{,,,x\} \,.\!\supset\!.\, \beta \in \mathfrak{V}.$$

証明. $\gamma=\alpha\cap(\beta\times\mathfrak{V})$ とする．10.8 と仮説により，$\mathrm{Func}\,\gamma$. したがって，13.1 により，$\gamma``\{,,,x\}\in\mathfrak{V}$. しかるに，$\gamma``\{,,,x\}$ は $\beta\cap\alpha``\{,,,x\}$ であり，かくして，仮説により，β.

13.1 の前に詳しく考察された〔定理〕型も，また，容易に導出される：

13.3 $$\{,,,x\}\cap\alpha\in\mathfrak{V}.$$

証明. $\{,,,x\}\cap\alpha\subseteq\{,,,x\}$. したがって，

$$\{,,,x\}\cap\alpha\subseteq I``\{,,,x\}.$$

それゆえ，10.4 と 13.2 により，$\{,,,x\}\cap\alpha\in\mathfrak{V}$.

また，関数の存在に関するこの帰結もある．

13.4 $$\mathrm{Func}\,\alpha\,.\,\breve{\alpha}``\mathfrak{V}\subseteq\{,,,x\}\,.\supset.\,\alpha\in\mathfrak{V}.$$

証明. 第 2 の仮説により，

$$(y)(z)(\langle y,z\rangle\in\alpha\,.\supset.\,z\in\{,,,x\}). \tag{1}$$

第 1 の仮説により，おのおのの z に対し，$\langle y,z\rangle\in\alpha$ なるたかだかひとつの y，かくして，たかだかひとつの $\langle y,z\rangle$ が存在する．したがって，

$$\beta=\{\langle\langle y,z\rangle,z\rangle:\langle y,z\rangle\in\alpha\}$$

なる場合，$\mathrm{Func}\,\beta$. それゆえ，13.1 により，$\beta``\{,,,x\}\in\mathfrak{V}$. しかるに，

$$\beta``\{,,,x\}=\{\langle y,z\rangle:z\in\{,,,x\}\,.\,\langle y,z\rangle\in\alpha\}$$

((1)により) $$=\{\langle y,z\rangle:\langle y,z\rangle\in\alpha\}$$

(9.6 により) $$={}^{\boldsymbol{\cdot}}\alpha.$$

よって，${}^{\boldsymbol{\cdot}}\alpha\in\mathfrak{V}$. しかるに，仮説と 10.1 により，${}^{\boldsymbol{\cdot}}\alpha=\alpha$.

次は，数学的帰納法の法則がそこでもっとも直接的に 13.1 によって与えられるところの形式である．

13.5 $$x\in\alpha\,.\,(y)(\{y\}\in\alpha\,.\supset.\,y\in\alpha)\,.\supset.\,\{,,,x\}\subseteq\alpha.$$

証明. 第 1 の仮説と 12.20 により，

$$x\in\{,,,x\}\cap\alpha. \tag{1}$$

12.9 と定義により，

$$\{y\}\in\{,,,x\}\,.\supset.\,y\in\{,,,x\};$$

したがって，第 2 の仮説により，

$$(y)(\{y\} \in \{,,,x\} \cap \alpha . \supset . y \in \{,,,x\} \cap \alpha). \qquad (2)$$

任意の $w \in \{,,,x\}$ に対して，12.19 により，$w \leqq x$，それゆえ，12.12 により，

$$(z)(x \in z . (y)(\{y\} \in z . \supset . y \in z) . \supset . w \in z).$$

13.3 および 6.11 によって，ここで z を $\{,,,x\} \cap \alpha$ にとれば，(1) と (2) から $w \in \{,,,x\} \cap \alpha$，したがって $w \in \alpha$ を結論できる.

クラス抽象体の型文字「α」から型述語文字「F」へ切りかえると，このことを次のように書くことができる：

13.6 $$Fx . (y)(F\{y\} \supset Fy) . w \leqq x . \supset Fw.$$

証明. 13.5 の「α」に「$\{z : Fz\}$」を入れて，2.1 によって還元すれば，最初の二つの仮説から $\{,,,x\} \subseteq \{z : Fz\}$ を結論できる．しかるに，最後の仮説と 12.19 により，$w \in \{,,,x\}$. したがって，Fw.

通常の，または上向きの方向の帰納法の法則は次のようにえられる：

13.7 $$Fw . (y)(Fy \supset F\{y\}) . w \leqq x . \supset Fx.$$

証明. 13.6 に代入して，

$$\sim Fx . (y)(\sim F\{y\} \supset \sim Fy) . w \leqq x . \supset \sim Fw.$$

これは 13.7 に等値である.

13.7 の第 2 の前提を長く，だが弱くすると，帰納法のより強い形式をうることができる：

13.8 $$Fw . (y)(w \leqq y . Fy . \supset F\{y\}) . w \leqq x . \supset Fx.$$

証明. 12.4—12.6 により，$w \leqq w$ および $w \leqq y . \supset . w \leqq \{y\}$. したがって，最初の二つの仮説により，

$$w \leqq w . Fw, \qquad (y)(w \leqq y . Fy . \supset . w \leqq \{y\} . F\{y\}).$$

これらと最後の仮説「$w \leqq x$」から，13.7 による帰納法によって，$w \leqq x . Fx$ が結論できる.

w を Λ にとり 12.3 に注意すれば，13.7 と 13.8 から，数学的帰納法の明白に数量的な形式：

13.9 $$F\Lambda . (y)(Fy \supset F\{y\}) . x \in \mathrm{N} . \supset Fx,$$

13.10 $$F\Lambda . (y)(y \in \mathrm{N} . Fy . \supset F\{y\}) . x \in \mathrm{N} . \supset Fx$$

をうる.

SとNに対するペアノの有名な五箇の公理は，いくつかの定理およびひとつの定理型としてすぐにえられる[3]. 彼の最初の二つの公理は，おのおのの数はひとつの，かつただひとつの後続者をもつということである；そして，Sがιである場合，これらのことは10.27 ($x \in \arg \iota$) でいわれている. 彼の第3の公理は，すべての数xおよびyに対して，もし$S`x = S`y$なら，$x=y$，ということである；そして，これは7.7でいわれている. 彼の第4の公理は，後続者でないある数がある，ということである；われわれはこれを10.26と12.14において有している ($\{x\} \neq \Lambda \in N$). 彼の第5の公理は，帰納法，13.10である. したがって，われわれはこれらすべてを無限クラスなしで獲得している.

§12で，「≦」についての古典的な算術法則を編集し始めたが，いまや，数学的帰納法の助けをかりて，それを続けるであろう.

13.11 $$x \leqq y \mathrel{.\equiv:} x = y \mathrel{.\mathbf{v}.} x < y.$$

証明. 12.7により，$z<\{z\}$. したがって，$x=z \mathrel{.\supset.} x<\{z\}$，そしてまた，12.10により，$x<z \mathrel{.\supset.} x<\{z\}$. 結合して，

$$(z)(x = z \mathrel{.\mathbf{v}.} x < z \mathrel{:\supset.} x < \{z\}) \qquad\qquad$$
$$\supset: x = \{z\} \mathrel{.\mathbf{v}.} x < \{z\}). \qquad (1)$$

さらに，$x=x$なので，$x=x \mathrel{.\mathbf{v}.} x<x$. これと(1)から13.7による帰納法によって，

$$x \leqq y \mathrel{.\supset:} x = y \mathrel{.\mathbf{v}.} x < y$$

となる. 逆は12.4と12.9による.

13.12 $$x < \{y\} \mathrel{.\equiv.} x \leqq y.$$

証明. 任意の$z \geqq \{x\}$を考察しよう. 12.11により，

$$\{x\} = z \mathrel{.\mathbf{v}} (\exists w)(z = \{w\}).$$

そこで，いずれにしろ，あるw (xまたは他のもの)に対して$z=\{w\}$. 12.6と12.5により，$x \leqq w \mathrel{.\supset.} x \leqq \{w\}$. すなわち，10.29により，

$$x \leqq \breve{\iota}`\{w\} \mathrel{.\supset.} x \leqq \{w\}.$$

3　Peano, 1889. それらはPeanoが彼の序文で引用しているDedekindの著作，1888, §6, にもあった；だが，Peanoの名はいまではそれらから切り離せない. さらに，Wang, 1957を参照.

すなわち，$x \leqq \check{\iota}\text{`}z\ .\supset .\ x \leqq z$. しかるに，$z$ は $\{x\}\leqq$ なる任意のものであった．したがって

$$(z)(\{x\} \leqq z\ .\ x \leqq \check{\iota}\text{`}z\ .\supset .\ x \leqq z)$$

(10.29 により) $$\supset .\ x \leqq \check{\iota}\text{`}\{z\}).$$

しかるに，また，10.29 と 12.4 により，$x \leqq \check{\iota}\text{`}\{x\}$. これら二つの結果から (13.8 の $w$ と $x$ を $\{x\}$ と $\{y\}$ に，「$Fz$」を「$x \leqq \check{\iota}\text{`}z$」にとれば) 13.8 による帰納法によって，

$$\{x\} \leqq \{y\}\ .\supset .\ x \leqq \check{\iota}\text{`}\{y\}$$

が結果する．すなわち，12.2 と 10.29 により，$x < \{y\}\ .\supset .\ x \leqq y$. 逆に，12.7 と 12.10 により，

$$(u)(x < \{u\}\ .\supset .\ x < \{\{u\}\}),$$

これと 12.7 から，13.7 による帰納法によって，$x \leqq y\ .\supset .\ x < \{y\}$ を結論できる．

13.13 $x \leqq \{y\}\ .\equiv :\ x = \{y\}\ .\mathbf{v}.\ x \leqq y$ （すなわち，$\{,,,\{y\}\} = \{,,,y\} \cup \{\{y\}\}$).

証明. 13.11 により，

$$x \leqq \{y\}\ .\equiv :\ x = \{y\}\ .\mathbf{v}.\ x < \{y\}$$

(13.12 により) $$\equiv :\ x = \{y\}\ .\mathbf{v}.\ x \leqq y.$$

13.14 $$z \leqq x\ .\ z \leqq y\ .\supset :\ x \leqq y\ .\mathbf{v}.\ y \leqq x.$$

証明. 13.11 と 12.2 により，

$$w \leqq x\ .\supset :\ w = x\ .\mathbf{v}.\ \{w\} \leqq x$$

(12.6 により) $$\supset :\ x \leqq \{w\}\ .\mathbf{v}.\ \{w\} \leqq x.$$

また，12.5 と 12.6 により，$x \leqq w\ .\supset .\ x \leqq \{w\}$. 結合して，

$$(w)(x \leqq w\ .\mathbf{v}.\ w \leqq x\ :\supset :\ x \leqq \{w\}\ .\mathbf{v}.\ \{w\} \leqq x).$$

第 1 の仮説によって，$x \leqq z\ .\mathbf{v}.\ z \leqq x$. これら二つの結果と第 2 の仮説 (「$z \leqq y$」) から，13.7 による帰納法によって，$x \leqq y\ .\mathbf{v}.\ y \leqq x$ を推論できる．

帰納法の使用にもかかわらず，定理 13.11—13.14 は数に対してだけではなく，12.4—12.12 のように，いかなる対象にも成りたつ．それらは反復された $\check{\iota}$ の意味，12.1 で定義された意味での「≦」についての一般法則である．それらは，とくに数量的な帰納法の法則 13.9 と 13.10 によってではなく，一般に，「≦」または反復された $\check{\iota}$ を支配する帰納法の法則 13.7 と 13.8 によって証明された．13.14 における仮定の必要によって，われわれは，突然，この一般性を思いおこす．連結性は一般的な意味での「≦」に対しては成りたたない；ι

または ι を反復することによって，あらゆるクラスからあらゆるクラスに達することはできない．数に固執するときには，ゼロまたは Λ が，そのとき z の役割を演ずるので，13.14 で必要とされた仮説は取りのぞかれる，かくして：

13.15 $x, y \in \mathrm{N} . \supset : x \leqq y . \mathbf{v} . y \leqq x.$ **証明**は 13.14, 12.3 による．

その他二・三の数に特有な定理は次の通りである．

13.16 $x \in \mathrm{N} . \equiv : x = \Lambda . \mathbf{v} . \Lambda < x.$ **証明**は 13.11, 12.3 による．

13.17 $x \in \mathrm{N} . \supset : \Lambda < x . \equiv . x \neq \Lambda.$

証明. 仮説と 13.16 により，$x \neq \Lambda . \supset . \Lambda < x.$ 逆に，12.18 により，$\sim(\Lambda < \Lambda)$，したがって，$\Lambda < x . \supset . x \neq \Lambda.$

13.18 $x \leqq y \in \mathrm{N} . \supset . x \in \mathrm{N}.$

証明[4]. 13.16 により，

$$(z)(\{z\} \in \mathrm{N} . \supset : \{z\} = \Lambda . \mathbf{v} . \Lambda < \{z\})$$

(10.26 により) $\quad \supset . \Lambda < \{z\})$

(13.12, 12.3 により) $\quad \supset . z \in \mathrm{N}).$

これと仮説から，13.6 による数学的帰納法によって，$x \in \mathrm{N}$ が結果する．

13.19 $x \in \mathrm{N} . \equiv . \{x\} \in \mathrm{N}.$

証明. 12.6 と 13.18 により，$\{x\} \in \mathrm{N} . \supset . x \in \mathrm{N}.$ 逆は 12.15 による．

この節のはじめで，「$x < x$」について反省した．個体は，もしそのようなものがあれば，それを満足する；そして，証明はできないが他のものもそうかもしれない．しかし，いま，数がそれを満足しないことを帰納法によって証明する．

13.20 $x \in \mathrm{N} . \supset \sim(x < x).$

証明. 13.12 と 12.2 により，$\{y\} < \{y\} . \supset . y < y.$ すなわち，

$$(y)(\sim(y < y) \supset \sim(\{y\} < \{y\})).$$

また，12.18 により，$\sim(\Lambda < \Lambda)$. したがって，13.9 による帰納法によって，13.20 が生ずる．

4 David Hemmendinger によって短縮された．

13.20 の二つの帰結でこの章は終る.

13.21 $$x \in \mathrm{N} .\supset: x \leqq y \leqq x .\equiv. x = y.$$

証明. 12.8 により，$x<y\leqq x .\supset. x<x$. したがって，仮説と 13.20 により，$\sim(x<y\leqq x)$. しかるに，13.11 により，

$$x \leqq y \leqq x .\supset: x = y .\mathbf{v}. x < y \leqq x.$$

したがって，$x\leqq y\leqq x .\supset. x=y$. 逆は 12.4 による.

13.22 $$x, y \in \mathrm{N} .\supset: x \leqq y .\equiv \sim(y < x).$$

証明. 13.11 と 12.4 により，

$$y \leqq x .\supset: x \leqq y .\mathbf{v}. y < x.$$

仮説と 13.15 により，$x\leqq y .\mathbf{v}. y\leqq x$. すぐ前〔13.21〕の証明におけるように，$\sim(y<x\leqq y)$. これら三つの結果は，真理関数的論理によって，$x\leqq y .\equiv \sim(y<x)$ を含意する.

V. 反復と算術

14. 系列と反復

いま，§11の(v)で熟考した和，積および巾の定義を目ざして，その節の(vii)および(viii)で熟考した Seq と $z^{|w}$ の定義を組みたてることにする．

14.1 「Seq」は「$\{x\colon \mathrm{Func}\, x\,.\,(\exists y)(\breve{x}``\mho = \{,,,y\})\}$」を表わす，

14.2 「$\alpha^{|\beta}$」は「$\{\langle x, y\rangle\colon (\exists z)(z\in \mathrm{Seq}\,.\,\langle x, \beta\rangle, \langle y, \Lambda\rangle \in z\,.\, z|\iota|\breve{z} \subseteq \alpha)\}$」を表わす．

反復についての二つの基礎的な法則は§11の(vi)で見られた．

14.3 $$\alpha^{|\Lambda} = I.$$

証明．$\langle x, y\rangle \in \alpha^{|\Lambda}$ なる任意の x, y を考えよう．14.2により，$\langle x, \Lambda\rangle, \langle y, \Lambda\rangle \in z$ なる系列 z が存在する．14.1により，Func z．したがって，$x=y$．かくして，$\alpha^{|\Lambda}\subseteq I$．逆に，$z=\{\langle x, \Lambda\rangle\}$ とする．すると，10.5によって，Func z，および，12.21によって，$\breve{z}``\mho=\{\Lambda\}=\{,,,\Lambda\}$，ゆえに，14.1により，$z\in\mathrm{Seq}$．さらに，10.26によって $(x)(\Lambda\neq\iota`x)$ なので，$z|\iota=\Lambda$；したがって，$z|\iota|\breve{z}=\Lambda$；それゆえ，$z|\iota|\breve{z}\subseteq\alpha$．さらに，$\langle x, \Lambda\rangle, \langle x, \Lambda\rangle \in z$．これらを合わせると $\langle x, x\rangle \in \alpha^{|\Lambda}$；14.2参照．したがって，$I\subseteq\alpha^{|\Lambda}$．

もうひとつの法則は二つに分けて証明されるであろう．

14.4 $$\alpha^{|\{x\}} \subseteq \alpha|\alpha^{|x}.$$

証明．$\langle y, z\rangle \in \alpha^{|\{x\}}$ なる任意の y, z を考えよう．14.2により，

$$\langle y, \{x\}\rangle, \langle z, \Lambda\rangle \in w, \qquad [\mathrm{i}]$$

$$w|\iota|\breve{w} \subseteq \alpha \qquad [\mathrm{ii}]$$

なる系列 w が存在する．14.1により，

$$\mathrm{Func}\, w \qquad [\mathrm{iii}]$$

かつ，

$$\breve{w}``\mho = \{,,,v\} \qquad [\mathrm{iv}]$$

なるあるもの v が存在する．[i]により，$\{x\}\in\breve{w}``\mho$．したがって，[iv]と定義により，$x<v$．それゆえ，12.9と定義により，$x\in\{,,,v\}$．したがって，[iv]により，

$$\langle u, x\rangle \in w \qquad [v]$$

なるあるもの u が存在する．そこで，再び [i] によって，われわれの系列 w は，[ii] とともに，14.2 によって $\langle u, z\rangle$ を $\alpha^{|x}$ のメンバーにするところの条件「$\langle u, x\rangle, \langle z, \Lambda\rangle \in w$」を満足する．そのうえ，[i] と [v] により，$\langle y, u\rangle \in w|\iota|\breve{w}$，したがって，[ii] により，$\langle y, u\rangle \in \alpha$．それゆえ，結合すれば，$\langle y, z\rangle \in \alpha|\alpha^{|x}$．しかるに，$\langle y, z\rangle$ は $\alpha^{|\{x\}}$ の任意のメンバーであった．

つぎに 14.4 の逆に向うが，これに 14.4 自身を結びつける．その証明は長く，証明される〔定理〕型のおよぶ範囲はきわめてひろい．それから一・二のステップで，われわれは次の周知の回帰法則のおのおのをうる：すべての $y \in \mathrm{N}$ に対して，

$$x + \mathrm{S}`y = \mathrm{S}`(x+y), \qquad x \cdot (\mathrm{S}`y) = x + x \cdot y, \qquad x^{\mathrm{S}`y} = x \cdot x^{y};$$

99 ページ以降の 16.6, 16.8, および 16.10 参照．

14.6 $$\alpha^{|\{x\}} = \alpha|\alpha^{|x}.$$

証明． $\langle y, z\rangle \in \alpha|\alpha^{|x}$ なる任意の y, z を考えよう．すなわち，

$$\langle y, u\rangle \in \alpha \qquad [i]$$

かつ $\langle u, z\rangle \in \alpha^{|x}$ なる，あるもの u が存在する，すなわち，

$$\langle u, x\rangle, \langle z, \Lambda\rangle \in w, \qquad [ii]$$

$$w|\iota|\breve{w} \subseteq \alpha \qquad [iii]$$

なる系列 w が存在する．14.1 により，

$$\mathrm{Func}\, w \qquad [iv]$$

かつ，

$$\breve{w}``\mho = \{,,,v\} \qquad [v]$$

なるあるもの v が存在する．[v] と [ii] により，$x, \Lambda \in \{,,,v\}$．すなわち，定義により，

$$x \leqq v \in \mathrm{N}. \qquad [vi]$$

したがって，13.18 により，

$$x \in \mathrm{N}. \qquad [vii]$$

すなわち，定義により，

$$\Lambda \in \{,,,x\}. \qquad [viii]$$

[vi], 12.5, および定義により, $\{,,,x\}\subseteq\{,,,v\}$. すなわち, [v] により,

$$\{,,,x\} \subseteq \breve{w}``\mathcal{V}. \qquad \text{[ix]}$$

[iv] と 10.8 により, $\mathrm{Func}\, w\restriction\{,,,x\}$. さらに, [vii] と 13.20 により,

$$\sim(x < x), \qquad \text{[x]}$$

すなわち, 定義により, $\{x\} \notin \{,,,x\}$. したがって, 10.7 により,

$$\mathrm{Func}\, w\restriction\{,,,x\} \cup \{\langle y, \{x\}\rangle\}.$$

そのうえ, [ix] により, この関数の右域は $\{,,,x\}\cup\{\{x\}\}$ である, すなわち, 13.13 により, $\{,,,\{x\}\}$. したがって, 13.4 により, その関数はあるもの t である. したがって,

$$t = w\restriction\{,,,x\} \cup \{\langle y, \{x\}\rangle\}. \qquad \text{[xi]}$$

すでに見たように, $\mathrm{Func}\, t$ かつ $\breve{t}``\mathcal{V}=\{,,,\{x\}\}$. したがって, 14.1 により,

$$t \in \mathrm{Seq}. \qquad \text{[xii]}$$

[ii] と [viii] により, $\langle z, \Lambda\rangle \in w\restriction\{,,,x\}$. したがって, [xi] により,

$$\langle y, \{x\}\rangle, \langle z, \Lambda\rangle \in t. \qquad \text{[xiii]}$$

最後に, $\langle q, s\rangle \in t|\iota|\breve{t}$ なる任意の q および s を考えよう. [xi]により, 考慮すべき可能性が四つある:

ケース 1: $\langle q, s\rangle \in w\restriction\{,,,x\}|\iota|\breve{\ }(w\restriction\{,,,x\})$.

すると, $\langle q, s\rangle \in w|\iota|\breve{w}$. このときには, [iii] により, $\langle q, s\rangle \in \alpha$.

ケース 2: $\langle q, s\rangle \in w\restriction\{,,,x\}|\iota|\{\langle\{x\}, y\rangle\}$.

すると, q は $\{\{x\}\}$ に対して $w\restriction\{,,,x\}$ をもつ. このとき, $\{\{x\}\} \in \{,,,x\}$. すなわち, 定義により, $\{x\}<x$. かくして, 12.9 と定義により, $x<x$, これは [x] に反する. したがって, ケース 2 は除かれる.

ケース 3: $\langle q, s\rangle \in \{\langle y, \{x\}\rangle\}|\iota|\breve{\ }(w\restriction\{,,,x\})$.

すると $q=y$ かつ $\langle s, x\rangle \in w$. このとき, [ii] と [iv] により, $s=u$. したがって, [i] により, $\langle q, s\rangle \in \alpha$.

ケース 4: $\langle q, s\rangle \in \{\langle y, \{x\}\rangle\}|\iota|\{\langle\{x\}, y\rangle\}$.

すると $\langle\{x\},\{x\}\rangle\in\iota$. このとき，10.28 により，$x=\{x\}$, したがって，12.7 により，$x<x$, これは [x] に反する．そこで，ケース 4 は除かれる．

それゆえ，$\langle q,s\rangle\in t|\iota|\breve{t}$ の可能な二つのケースにおいて，$\langle q,s\rangle\in\alpha$. ゆえに，$t|\iota|\breve{t}\subseteq\alpha$. 14.2 を考慮すれば，これと [xii] と [xiii] を合せると，$\langle y,z\rangle\in\alpha^{|\{x\}}$ となる．しかるに，$\langle y,z\rangle$ は $\alpha|\alpha^{|x}$ の任意のメンバーであった．したがって，$\alpha|\alpha^{|x}\subseteq\alpha^{|\{x\}}$. ゆえに，14.4 により，$\alpha^{|\{x\}}=\alpha|\alpha^{|x}$.

14.6 と 14.3 から，とくに，$\alpha^{|\{\Lambda\}}=\alpha|I$ をうる．したがって，

14.7 $$\alpha^{|\{\Lambda\}}={}^{\cdot}\alpha.$$

これから，こんどは，14.6 によって

14.8 $$\alpha^{|\{\{\Lambda\}\}}=\alpha|\alpha$$

をうる，等々．

つぎに，空なるケースを片づけよう．

14.9 $$x\notin\mathrm{N}\,.\supset.\,\alpha^{|x}=\Lambda.$$

証明．$\langle y,z\rangle\in\alpha^{|x}$ と仮定しよう．すると，定義により，$\langle y,x\rangle,\langle z,\Lambda\rangle\in w$ かつ $\breve{w}``\mho=\{,,,v\}$ なる v と w が存在する．そのとき，$x,\Lambda\in\{,,,v\}$. すなわち，定義により，$x\leqq v\in\mathrm{N}$. だが，そのときは，13.18 により，$x\in\mathrm{N}$ となるが，これは仮定に反する．

関係の積(resultant) $\alpha|\beta$ への関係の合成は結合的演算なので，$\alpha^{|y}$ は，いかなる特定の区分けからも独立に，〔α の〕y 箇の現われ方に対して $\alpha|\alpha|\ldots|\alpha$ のはずである．それゆえ，$\alpha^{|\{x\}}$ は，$\alpha^{|x}|\alpha$ でも $\alpha|\alpha^{|x}$ でもあるべきである．これが，いま，証明される．

14.10 $$\alpha^{|\{x\}}=\alpha^{|x}|\alpha.$$

証明．14.6 により，$\alpha^{|\{\{y\}\}}=\alpha|\alpha^{|\{y\}}$. したがって，

$$(y)(\alpha^{|\{y\}}=\alpha^{|y}|\alpha\,.\supset.\,\alpha^{|\{\{y\}\}}=\alpha|\alpha^{|y}|\alpha)$$

(14.6 により) $$=\alpha^{|\{y\}}|\alpha).$$

14.7 により，

$$\alpha^{|\{\Lambda\}}={}^{\cdot}\alpha=I|\alpha$$

(14.3 により) $$=\alpha^{|\Lambda}|\alpha.$$

これら二つの結果から，13.9 による帰納法によって，もし $x\in\mathrm{N}$ なら $\alpha^{|\{x\}}=\alpha^{|x}|\alpha$, となる．もし $x\notin\mathrm{N}$ なら，14.9 により，$\alpha^{|x}=\Lambda$, それゆえ，$\alpha^{|x}|\alpha=\Lambda$；また，13.19 によっ

て，$\{x\} \notin \mathrm{N}$，したがって，14.9 により $\alpha^{|\{x\}} = \Lambda$．

関数の反復に関する若干の法則で終りとする．

14.11 $$x \in \mathrm{N} \,.\, \arg \alpha = \mho \,.\supset .\, \arg \alpha^{|x} = \mho.$$

証明．もし $\arg \alpha^{|w} = \mho$ なら，任意のもの z に対してちょうどひとつのもの y が $\alpha^{|w}$ をもつ．しかし，こんどは，仮説により y に対してちょうどひとつのものが α をもつ；そこで，このものだけが z に対して $\alpha|\alpha^{|w}$ をもつであろう．したがって，

$$(w)(\arg \alpha^{|w} = \mho \,.\supset .\, \arg (\alpha|\alpha^{|w}) = \mho)$$

(14.6 により) $$\supset .\, \arg \alpha^{|\{w\}} = \mho).$$

しかるに，また，14.3 と 10.4 により，$\arg \alpha^{|\Lambda} = \mho$．そこで，仮説により $x \in \mathrm{N}$ なので，13.9 による帰納法によって，$\arg \alpha^{|x} = \mho$ と結論してよい．

14.12 $$\mathrm{Func}\, \alpha \supset \mathrm{Func}\, \alpha^{|x}.$$

証明は，$x \in \mathrm{N}$ なる場合には，上の証明の「ちょうど」を「たかだか」に，「arg…$=\mho$」を「Func…」に変える．$x \notin \mathrm{N}$ なる場合には，証明は 14.9 と 10.3 による．

14.13 $$I^{|x}{}^{\backprime}\Lambda = \Lambda.$$

証明．14.6 により，$I^{|\{y\}} = I|I^{|y} = I^{|y}$．したがって，$I^{|y} = I \,.\supset .\, I^{|\{y\}} = I$．さらに，14.3 により，$I^{|\Lambda} = I$．それゆえ，13.9 により，$x \in \mathrm{N}$ に対して，$I^{|x} = I$．$x \notin \mathrm{N}$ なる場合には，14.9 により $I^{|x} = \Lambda$．この両者は 14.13 を与える．

15. 祖先関係

われわれは，いまや，自然数の和，積および巾に進む用意ができている．だが，私は，幕間いとして，ある関係の**祖先関係**(*ancestral*)について扱うであろう．これは，自然数を引きつづき取り扱う際に，また実数を扱うときでさえも，どこでも使用されるというような概念ではない．だが，それは重要な概念である．われわれは今後いくつかの点(§§ 25, 24, 29)でそれを用いるであろう，通常，それは自然数の理論の基礎において使われている．ここに私が挿入してそれを展開するのは，それが反復に直接基づいているからである．

この概念には，すでにその二つの事例において，われわれは出あった：§4 の初めにある親による祖先の定義，および S による「≧」の定義(あるいは，S と 0 による「∈N」の定義)とである．一般に，関係 w の祖先関係というのは，x が y であるか，x が y に対

して w をもつか，y に対して w をもつあるものに対して x が w をもつか，等々，であるとき，かつそのときにかぎって，あるもの x があるもの y に対してもつ関係 $^*w$ であるといわれる．かくして，w が親関係である場合，$^*w$ は祖先関係である．w が後続者関数である場合，$^*w$ は $\{\langle x, y\rangle : x \geqq y\}$ であり，N は $^*w``\{0\}$ である．$^*w$ を定義する古典的な方法は，フレーゲに負うが[1]，われわれは，すでに，それを二つの例で見ている；一般に，

(i)　$$^*\alpha = \{\langle x, y\rangle : (z)(y \in z \,.\, \alpha``z \subseteq z \,.\supset.\, x \in z)\}.$$

だが，この方策は，α が後続者関数であるとき，それが成功するには無限クラスが存在するということに依存していることもわれわれは見た(§11)．そして，その依存が，後続者の例において，反転によってどのようにして避けられるかということも見た．

この反転は，その成功を後続者に固有な特徴に負うていた：終りはないが，初めのある列を生ぜしめるという特徴である．後続者に関して閉じているクラスは，無意味なものでないときには，無限である；先行者に関して閉じているクラスはそうではない．だが，もしも，われわれがむしろ負の数を含めて一般に整数のあいだの後続者関数を取り扱っていたのならば，その切りかえはわれわれになんら利するところがなかったであろう．その中に整数をもつクラスは，もしそれがこの領域で後続者あるいは先行者に関して閉じているべきであるならば，無限にならざるをえない．

だが，一般的な解決法が手もとにある．結局，$^*\alpha$ は，x が y に対して α の反復をもつような x の y に対する関係にすぎない．祖先関係はすべての反復の合併である．

15.1　　「$^*\alpha$」は「$\{w : (\exists z)(w \in \alpha^{|z})\}$」を表わす[2]．

通常の展開の順序に従えば，まず祖先関係の一般理論が展開され，そして，N は，その後で祖先関係の一般概念をとくに S に適用することによってえられる．この通常のアプローチのもとでは，祖先関係の一般的な定義は(i)であり，そして，それを支配する定理は，多く，適当な種類の無限クラスが存在することに依存している．われわれは，N に必要な祖先関係の特別なケースが，後続者関数に固有な特徴のおかげで，無限クラスを仮定する

1　この方法は，『連鎖』(chains) の名の下に，たえず，Dedekind(1888)に帰せられている；だが，それ以前に Frege はそれを述べていた(1879, §§26, 29)．彼はそこで通常の祖先関係と，私が三・四ページ後で真の(*proper*)祖先関係とよぶものとの双方を定義していた．1884年(94ページ)に，彼は，再び，通常の祖先関係を定義した．Dedekind は，1957年の Wang の論文に翻訳されている1890年の書簡で，Frege の優先権を認めている．

2　私の「$\{\langle x, y\rangle : (\exists z)(\langle x, y\rangle \in \alpha^{|z})\}$」についての，Constance Leuer 嬢の改良．

ことなしにどのようにして処理されうるかを見出した．そして，今では，定義 14.1, 14.2, および 15.1 を通して，祖先関係のひいきにされた特別なケースから，無限クラスを是認する古典的な表現と等値ではあるが，それ自身は無限クラスを要求しない一般的概念の表現を，われわれは導きだしたのである．祖先関係の理論は，通常のように，算術への導入部ではなく，われわれにとっては算術の応用である．

つぎに，祖先関係の古典的ないろいろな法則を導出しよう．

15.2 $\langle x, x\rangle \in {}^*\alpha$ （すなわち，$I \subseteq {}^*\alpha$）[3]．

証明．14.3 により，$\langle x, x\rangle \in \alpha^{|\Lambda}$．したがって，$(\exists z)(\langle x, x\rangle \in \alpha^{|z})$, q. e. d.

15.3 $\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\supset.\, \langle x, y\rangle \in {}^*\alpha$ （すなわち，${}^{\cdot}\alpha \subseteq {}^*\alpha$）．

証明はおなじように 14.7 から．

15.4 $\langle x, y\rangle \in {}^*\alpha \,.\, \langle y, z\rangle \in \alpha \,.\supset.\, \langle x, z\rangle \in {}^*\alpha$ （すなわち，${}^*\alpha|\alpha \subseteq {}^*\alpha$）．

証明．第1の仮説と 15.1 により，$\langle x, y\rangle \in \alpha^{|w}$ なるあるもの w がある．したがって，第2の仮説により，$\langle x, z\rangle \in \alpha^{|w}|\alpha$．ゆえに，14.10 により，$\langle x, z\rangle \in \alpha^{|\{w\}}$．そこで，15.1 により，$\langle x, z\rangle \in {}^*\alpha$．

15.5 $\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\, \langle y, z\rangle \in {}^*\alpha \,.\supset.\, \langle x, z\rangle \in {}^*\alpha$ （すなわち，$\alpha|{}^*\alpha \subseteq {}^*\alpha$）．

証明はおなじように 14.6 から．

15.6 $\alpha|{}^*\alpha = {}^*\alpha|\alpha.$

証明．14.6 と 14.10 により，$\alpha|\alpha^{|w}=\alpha^{|w}|\alpha$．すなわち，

$$(\exists y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\, \langle y, z\rangle \in \alpha^{|w}) \equiv (\exists y)(\langle x, y\rangle \in \alpha^{|w} \,.\, \langle y, z\rangle \in \alpha).$$

あとは定義から明らかである．

15.7 $\alpha``\beta \subseteq \beta \,.\equiv.\, {}^*\alpha``\beta = \beta.$

証明．右から左への条件記号は，15.3 (${}^{\cdot}\alpha\subseteq{}^*\alpha$) からただちにえられる．そこで，逆に，$\alpha``\beta\subseteq\beta$ と仮定しよう；${}^*\alpha``\beta=\beta$ を証明する．$\alpha``\beta\subseteq\beta$ なので，$\gamma``(\alpha``\beta)\subseteq\gamma``\beta$ を論証できる，それゆえ，とくに，

3 この点で，祖先関係の私の表現は，Frege のものに一致し，Whitehead and Russell のそれとは異なる，後者にとっては，x が α の全域に入っているのでなければ，$\langle x, x\rangle$ は α の祖先関係の中にない．彼らは(i)にある文節を挿入してこの制限を保証している．彼らは，また，彼らの $\alpha^{|0}$ の表現をそれに合せて制限している．

$$\alpha^{|x}``(\alpha``\beta) \subseteq \alpha^{|x}``\beta.$$

すなわち，14.10により，$\alpha^{|\{x\}}``\beta \subseteq \alpha^{|x}``\beta$. したがって，

$$(x)(\alpha^{|x}``\beta \subseteq \beta .\supset. \alpha^{|\{x\}}``\beta \subseteq \beta).$$

しかるに，また，14.3により，$\alpha^{|\Lambda}``\beta\subseteq\beta$. それゆえ，13.9による帰納法によって，任意の $z \in \mathrm{N}$ に対して，$\alpha^{|z}``\beta\subseteq\beta$ をうる．しかるに，また，14.9により，任意の $z \notin \mathrm{N}$ に対しても，$\alpha^{|z}``\beta\subseteq\beta$. したがって，$(z)(\alpha^{|z}``\beta\subseteq\beta)$，すなわち，

$$(z)(x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha^{|z} . y \in \beta .\supset. x \in \beta),$$

すなわち，15.1により，${}^*\alpha``\beta\subseteq\beta$. 逆に，15.2によって，$\beta=I``\beta\subseteq{}^*\alpha``\beta$.

15.7に伴なって，さらに，次式をうる．

15.8 $$\alpha|\beta \subseteq \beta .\equiv. {}^*\alpha|\beta = {}^{\cdot}\beta.$$

証明. 15.7に代入して，

$$\alpha``(\beta``\{y\}) \subseteq \beta``\{y\} .\equiv. {}^*\alpha``(\beta``\{y\}) = \beta``\{y\}.$$

すなわち，

$$(\alpha|\beta)``\{y\} \subseteq \beta``\{y\} .\equiv. ({}^*\alpha|\beta)``\{y\} = \beta``\{y\}.$$

したがって，

$$(x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha|\beta .\supset. \langle x, y\rangle \in \beta) \equiv (x)(y)(\langle x, y\rangle \in {}^*\alpha|\beta .\equiv. \langle x, y\rangle \in \beta).$$

9.8と9.9によって，これは15.8に帰着する．

$^*\alpha$ の推移性は，ただちに結果する．

15.9 $$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in {}^*\alpha .\supset. \langle x, z\rangle \in {}^*\alpha \qquad (\text{事実，} {}^*\alpha|{}^*\alpha = {}^*\alpha).$$

証明. 15.5により，$\alpha|{}^*\alpha\subseteq{}^*\alpha$. すなわち，15.8により，${}^*\alpha|{}^*\alpha={}^*\alpha$.

15.7の困難な核心部は，「$\alpha``\beta\subseteq\beta .\supset. {}^*\alpha``\beta\subseteq\beta$」である．それは，**祖先関係の帰納法** (*ancestral induction*) の一般法則を含んでいる：

15.10
$$\begin{aligned} &Fz\,. \\ &(x)(y)(\langle y, x\rangle \in \alpha \,.\, Fx .\supset Fy)\,. \\ &\langle w, z\rangle \in {}^*\alpha\,. \\ &\qquad \supset Fw. \end{aligned}$$

証明. 第2の仮説により，

$$\alpha``\{x : Fx\} \subseteq \{x : Fx\}.$$

したがって，15.7 により，

$$^*\alpha``\{x : Fx\} = \{x : Fx\}. \qquad (1)$$

第 1 の前提により，$z \in \{x : Fx\}$. それゆえ，第 3 の前提により，

$$w \in {}^*\alpha``\{x : Fx\}.$$

したがって，(1)により，Fw.

そのよく知られている形式 13.9 における数学的帰納法は，この法則の α を後続者にとることによる特殊化である．だが，われわれは，慣例に反して，一般を特殊から導きだした；15.7 を証明するときの 13.9 の使用に注意されたい．

§4 の親による定義が，「祖先」に，あらゆるものが自分自身の祖先になるという拡張した意味を与えたということは，すでに指摘された．それに応じて，われわれは 15.2: $I \subseteq {}^*\alpha$ を有する．だが，固有の意味での祖先に対応するものを導くのは容易であり，それはその一般的な定式化において α の真の (*proper*) 祖先関係とよばれる．それは，x が y に対して，まさに，$\alpha|\Lambda\ (=I)$ ではなく，α のある正の (*positive*) 反復をもつ場合の x の y に対する関係である．それは $\alpha|{}^*\alpha$ にすぎないか，もしくは，15.6 によればおなじであるが，$^*\alpha|\alpha$ である．当然のことであるが，$^*\alpha$ は I と真の祖先関係との合併である．これは，いま，証明されるであろう．

15.11 $$^*\alpha = I \cup (\alpha|{}^*\alpha).$$

証明[4].

$$\beta = I \cup (\alpha|{}^*\alpha) \qquad (1)$$

とする．このとき，15.2 と 15.5 により，

$$\beta \subseteq {}^*\alpha. \qquad (2)$$

それゆえ，$\alpha|\beta \subseteq \alpha|{}^*\alpha$. したがって，(1)により，$\alpha|\beta \subseteq \beta$. すなわち，15.8 により，

$$^*\alpha|\beta = \beta. \qquad (3)$$

(1)により，$I \subseteq \beta$. それゆえ，$^*\alpha|I \subseteq {}^*\alpha|\beta$. すなわち，$^*\alpha \subseteq {}^*\alpha|\beta$. すなわち，(3)により，$^*\alpha \subseteq \beta$. したがって，(2)により，$^*\alpha = \beta$.

追加に値するもうひとつの法則は，

4 William C. Waterhouse によって短縮された．

15.12 $$^*\breve{\alpha} = \breve{\ }^*\alpha.$$

証明. 15.4 により,

$$(z)(y)(\langle y, z\rangle \in \breve{\alpha} \,.\, \langle x, z\rangle \in {}^*\alpha \,.\supset.\, \langle x, y\rangle \in {}^*\alpha).$$

これと 15.2 とから, 15.10 による祖先関係の帰納法によって, $\langle w, x\rangle \in {}^*\breve{\alpha}$ なるいかなる w に対しても $\langle x, w\rangle \in {}^*\alpha$ を推論できる; かくして, $\langle w, x\rangle \in \breve{\ }^*\alpha$ を推論できる. しかるに, x は任意のものであった. したがって,

$$^*\breve{\alpha} \subseteq \breve{\ }^*\alpha. \tag{1}$$

すなわち, $\breve{\ }^*\breve{\alpha} \subseteq {}^*\alpha$. 同様にして,「$\alpha$」に「$\breve{\alpha}$」を代入して, $\breve{\ }^*\alpha \subseteq {}^*\breve{\alpha}$. したがって, (1) により, $^*\breve{\alpha} = \breve{\ }^*\alpha$.

最後に, $\{\langle x, y\rangle : x \geqq y\}$ が, 結局, 後続者関数, あるいは, ι の祖先関係であること, および, N が $^*\mathrm{S}``\{0\}$, あるいは $^*\iota``\{\Lambda\}$ であることを示してこの廻り道を終ろう.

15.13 $$x \geqq y \,.\equiv.\, \langle x, y\rangle \in {}^*\iota.$$

証明. $\langle \{z\}, z\rangle \in \iota$. したがって, 15.5 により,

$$(z)(\langle z, y\rangle \in {}^*\iota \,.\supset.\, \langle \{z\}, y\rangle \in {}^*\iota).$$

また, 15.2 により, $\langle y, y\rangle \in {}^*\iota$. そこで, 13.7 による帰納法によって,

$$y \leqq x \,.\supset.\, \langle x, y\rangle \in {}^*\iota. \tag{1}$$

逆に,

$$(z)(w)(\langle z, w\rangle \in \iota \,.\supset.\, z = \{w\})$$

(12.6 により) $$\supset.\, z \geqq w)$$

(12.5 により) $$\supset: w \geqq y \,.\supset.\, z \geqq y).$$

また, 12.4 により, $y \geqq y$. ゆえに, 15.10 による帰納法によって,

$$\langle x, y\rangle \in {}^*\iota \,.\supset.\, x \geqq y.$$

これと (1) とが合わさると, 15.13 になる.

15.14 $$\mathrm{N} = {}^*\iota``\{\Lambda\}.$$

証明. 12.3 と 15.13 により, N は $\{x : \langle x, \Lambda\rangle \in {}^*\iota\}$, q. e. d.

より特定なものとしては, 事実,

15.15 $$x \in \mathrm{N} \,.\supset.\, \langle x, \Lambda\rangle \in \iota^{|x}.$$

証明. $\langle\{y\}, y\rangle \in \iota$. したがって，

$$(y)(\langle y, \Lambda\rangle \in \iota^{|y} . \supset . \langle\{y\}, \Lambda\rangle \in \iota|\iota^{|y})$$

(14.6 により) $$\supset . \langle\{y\}, \Lambda\rangle \in \iota^{|\{y\}}).$$

また，14.3 により，$\langle\Lambda, \Lambda\rangle \in \iota^{|\Lambda}$. そこで，13.9 による帰納法によって 15.15 をうる.

祖先関係についての幕間いは終った，そして，われわれは自然数の理論にもどるが，そこでは祖先関係が用いられることはないであろう.

16. 和，積，巾

さて，§11 で予めのべられていた和，積および巾の定義へ進もう.

16.1 「$\alpha+\beta$」は「$\iota^{|\beta}{}^{\backprime}\alpha$」を表わす.

16.2 「$\alpha\cdot\beta$」は「$(\lambda_x(\alpha+x))^{|\beta}{}^{\backprime}\Lambda$」を表わす.

16.3 「α^β」は「$(\lambda_x(\alpha\cdot x))^{|\beta}{}^{\backprime}\{\Lambda\}$」を表わす.

これらの表現はすべて，結局のところ，単称記述として定義されているので，記述に対してすでに成りたっている，変項への自由な代入という，便法がそれらに適用される.

さて，空なるケースを処理しよう.

16.4 $$x \notin \mathrm{N} . \supset . \alpha+x = \alpha\cdot x = \alpha^x = \Lambda.$$

証明. 仮説と 14.9 により，16.1—16.3 で定義された三つの表現は，それぞれ：

$$\Lambda{}^{\backprime}\alpha, \qquad \Lambda{}^{\backprime}\Lambda, \qquad \Lambda{}^{\backprime}\{\Lambda\}$$

に帰する. 10.20 により，すべて Λ.

つぎに，よく知られている回帰法を証明する.

16.5 $$x+\Lambda = x.$$

証明. 14.3 と 16.1 により，$x+\Lambda = I{}^{\backprime}x = x$.

16.6 $$y \in \mathrm{N} . \supset . x+\{y\} = \{x+y\}.$$

証明. 仮説と 10.27 から，14.11 によって，$\arg \iota^{|y} = \mho$ をうる. したがって，10.18 と 10.26 により，

$$(\iota|\iota^{|y}){}^{\backprime}x = \{\iota^{|y}{}^{\backprime}x\}.$$

すなわち，14.6 により，$\iota^{|\{y\}}{}^{\backprime}x = \{\iota^{|y}{}^{\backprime}x\}$. すなわち，16.1 により，$x+\{y\}=\{x+y\}$.

16.7 $$x \cdot \Lambda = \Lambda.$$

証明. 14.3 と 16.2 により，$x \cdot \Lambda = I`\Lambda = \Lambda$.

16.8 $$y \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x \cdot \{y\} = x + x \cdot y.$$

証明. $\alpha = \lambda_z(x+z)$ とする．このとき，$(z)(x+z \in \mho)$ なので，10.23 により，$\arg \alpha = \mho$. したがって，14.11 により，$\arg \alpha^{|y} = \mho$. それゆえ，$\Lambda \in \arg \alpha^{|y}$. したがって，10.18 により，

$$(\alpha | \alpha^{|y})`\Lambda = \alpha`(\alpha^{|y}`\Lambda).$$

ゆえに，14.6 により，$\alpha^{|\{y\}}`\Lambda = \alpha`(\alpha^{|y}`\Lambda)$. すなわち，16.2 により，$x \cdot \{y\} = \alpha`(x \cdot y)$. すなわち，10.24 により，$x \cdot \{y\} = x + x \cdot y$.

16.9 $$x^{\Lambda} = \{\Lambda\}.$$

16.10 $$y \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x^{\{y\}} = x \cdot x^{y}.$$

証明は同様．

つぎに，自然数の和，積，および巾が自然数であることを見る．

16.11 $$x \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x + y \in \mathrm{N}.$$

証明. 12.15 により，

$$(z)(x+z \in \mathrm{N} \,.\supset.\, \{x+z\} \in \mathrm{N}).$$

したがって，16.6 により，

$$(z)(z,\, x+z \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x+\{z\} \in \mathrm{N}).$$

また，仮説と 16.5 により，$x+\Lambda \in \mathrm{N}$. そこで，強い形の帰納法 13.10 によって，もし $y \in \mathrm{N}$ なら，$x+y \in \mathrm{N}$ を結論する．しかるに，もし $y \notin \mathrm{N}$ なら，16.4 によって，$x+y=\Lambda$，それゆえ，再び，$x+y \in \mathrm{N}$.

16.12 $$x \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x \cdot y \in \mathrm{N}.$$

証明. ケース 1: $y \notin \mathrm{N}$ あるいは $y=\Lambda$. 16.4 あるいは 16.7 により，$x \cdot y = \Lambda$. ゆえに，$x \cdot y \in \mathrm{N}$.

ケース 2: $\Lambda \neq y \in \mathrm{N}$. 12.16 により，ある z に対し $y=\{z\}$. 13.19 により，$z \in \mathrm{N}$. したがって，16.8 により，$x \cdot y = x + x \cdot z$. しかるに，16.11 と仮説により，$x + x \cdot z \in \mathrm{N}$. それゆえ，$x \cdot y \in \mathrm{N}$.

16.13 $x \in \mathrm{N} . \supset . x^y \in \mathrm{N}.$ **証明**は同様.

次の二つの定理は，「≦」を「＋」に関連させる.

16.14 $y \in \mathrm{N} . \supset . x \leqq x+y.$

証明. 16.6 により，

$$z \in \mathrm{N} . \supset . \{x+z\} = x+\{z\}$$

(12.6 により) $\supset . x+z \leqq x+\{z\}$

(12.5 により) $\supset : x \leqq x+z . \supset . x \leqq x+\{z\}.$ (1)

16.5 と 12.4 により，$x \leqq x+\Lambda$. これら二つの結果と仮説とから，13.10 による帰納法によって $x \leqq x+y$ を結論する.

16.15 $x \leqq y . \equiv (\exists z)(z \in \mathrm{N} . x+z = y).$

証明. 16.6 により，

$$z \in \mathrm{N} . \supset . x+\{z\} = \{x+z\}$$
$$\supset : x+z = w . \supset . x+\{z\} = \{w\}.$$

それゆえ，12.15 により，

$$z \in \mathrm{N} . x+z = w . \supset . \{z\} \in \mathrm{N} . x+\{z\} = \{w\}.$$

したがって，

$$(w)((\exists z)(z \in \mathrm{N} . x+z = w) \supset (\exists z)(z \in \mathrm{N} . x+z = \{w\})).$$

また，16.5 と 12.14 により，

$$(\exists z)(z \in \mathrm{N} . x+z = x).$$

これら二つの結果から，13.7 による帰納法によって，

$$x \leqq y . \supset (\exists z)(z \in \mathrm{N} . x+z = y)$$

となる. 逆に，16.14 により，任意の z に対し $z \in \mathrm{N} . \supset . x \leqq x+z$，それゆえ，

$$(\exists z)(z \in \mathrm{N} . x+z = y) \supset . x \leqq y.$$

初等数論(*elementary number theory*)とよばれるものは，ゼロ，後続者，和，積，巾，同一性，真理関数，および自然数の上への量化の記法だけを用いて表現されうる理論を含んでいる. もっと短かいリストでも十分であろう；たったいまリストに入れた初めの四項目，あるいは最初の二つと第5の項目を省略して，残りのものでそれらをいいかえる方法を与えてやることができる. だが，この余分な項目を含むリストは，古典的な公理体系：

ペアノの諸公理と和，積，および巾に対する回帰法，がほとんど直接的にそれに合致しているという点で自然なものである．それらは完全な公理化ではない；ゲーデルの1931年の有名な発見は，初等数論がそのような公理化をも認めないということであった．だが，それらは大いに役にたつ．この標準的な基礎から，初等数論の古典的な法則を導出することは標準的な仕事である，そして，回帰法やペアノの公理がわれわれの定理に混じって手もとにある現在，この章のあとの部分は主としてそのことの例証に向う．

われわれ自身の量化の変項の〔値の〕範囲は，もちろん，数を超えているが，初等数論の変項は数に制限されている．だが，それが問題になる場合には，われわれの変項を制限するための一定の文節「$x \in \mathrm{N}$」をわれわれは有している．この節でわれわれの興味をひく変項の値は自然数だけなので，「$x \in \mathrm{N}$」，「$\{x\} \in \mathrm{N}$」，「$x+y \in \mathrm{N}$」，「$x \cdot y \in \mathrm{N}$」といった形の文節を省略し，それらを定理の中では保存しておくが，証明ではとばすことにして，私はこの節のあとの部分の証明を簡単にすることにする．そのような文節を述べている法則12.14, 12.15, 16.11, および16.12を参照にすることは，ここでは，省略する．新しい変項が証明の過程で導入されるときでさえ，「$\in \mathrm{N}$」という条件をはっきり表明しないでおくであろう．読者は欠けている細部を容易にうめることができるし，それを練習として試みてみれば有益でもあろう．

初等数論の語彙を数えなおす際，私は「≦」(と，それから派生するもの「<」，「≧」，「>」) を省略した．「$(\exists z)(x+z=y)$」で間にあうので，それは余分である；16.15参照．それが標準的な手続きの以下の例に入りこんでくるときには，その性質は，16.15を経て「+」の性質からえられる．

16.16　　$x \in \mathrm{N} .\supset. \Lambda + x = x.$

証明．16.6により，$\Lambda+\{y\}=\{\Lambda+y\}$．したがって，

$$\Lambda + y = y .\supset. \Lambda + \{y\} = \{y\}.$$

しかるに，また，16.5により，$\Lambda+\Lambda=\Lambda$．それゆえ，帰納法により，$\Lambda+x=x$.

16.17　　$x, y \in \mathrm{N} .\supset. \{x\}+y = \{x+y\}.$

証明．16.5により，$x+\Lambda=x$ かつ $\{x\}+\Lambda=\{x\}$．したがって，

$$\{x\}+\Lambda = \{x+\Lambda\}. \tag{1}$$

16.6により，$x+\{z\}=\{x+z\}$．それゆえ，

$$(z)(\{x\}+z=\{x+z\}\,.\supset.\,x+\{z\}=\{x\}+z)$$
$$\supset.\,\{x+\{z\}\}=\{\{x\}+z\})$$
(16.6 により)
$$=\{x\}+\{z\})$$
$$\supset.\,\{x\}+\{z\}=\{x+\{z\}\}).$$

これと (1) から，帰納法によって $\{x\}+y=\{x+y\}$ をうる.

16.18 $$x, y \in \mathrm{N}\,.\supset.\,x+y=y+x.$$

証明. 16.6 と 16.17 により，$x+\{z\}=\{x+z\}$ かつ $\{z\}+x=\{z+x\}$. したがって,

$$x+z=z+x\,.\supset.\,x+\{z\}=\{z\}+x.$$

また，16.16 と 16.5 により，$x+\Lambda=\Lambda+x$. それゆえ，帰納法により，$x+y=y+x$.

16.19 $$x, y, z \in \mathrm{N}\,.\supset.\,(x+y)+z=x+(y+z).$$

証明. 16.6 により,

$$(x+y)+\{w\}=\{(x+y)+w\}.$$

したがって,

$$(x+y)+w=x+(y+w)\,.\supset.\,(x+y)+\{w\}=\{x+(y+w)\}$$
(16.6 により)
$$=x+\{y+w\}$$
(16.6 により)
$$=x+(y+\{w\}).$$

16.5 により，$(x+y)+\Lambda=x+y$ かつ $y+\Lambda=y$. それゆえ,

$$(x+y)+\Lambda=x+(y+\Lambda).$$

これら二つの結果から，帰納法によって,

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

16.20 $$x, y, z \in \mathrm{N}\,.\,x+z=y+z\,.\supset.\,x=y.$$

証明. 7.7 により,

$$x+w=y+w\,.\equiv.\,\{x+w\}=\{y+w\}$$
(16.6 により)
$$\equiv.\,x+\{w\}=y+\{w\}.$$

それゆえ,

$$(w)(x+w\neq y+w\,.\supset.\,x+\{w\}\neq y+\{w\}).$$

これと「$x+\Lambda\neq y+\Lambda$」から帰納法によって，$x+z\neq y+z$ になるが，これは仮説に反す

る；ゆえに $x+\Lambda=y+\Lambda$，すなわち，16.5 により，$x=y$.

16.21 $$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x+y = x \,.\supset.\, y = \Lambda.$$

証明. 仮説と 16.18 により，$y+x=x$. したがって，16.16 により，$y+x=\Lambda+x$. それゆえ，16.20 により，$y=\Lambda$.

16.22 $$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x+y = \Lambda \,.\supset.\, x = \Lambda.$$

証明. 仮説と 16.14 により，$x\leqq\Lambda$. したがって，12.17 により，$x=\Lambda$.

16.23 $$\Lambda\cdot x = \Lambda.$$

証明. 16.2 と 16.16 により，$\Lambda\cdot x=(\lambda_y y)^{|x{}^\backprime}\Lambda$. すなわち，定義により，$\Lambda\cdot x=I^{|x{}^\backprime}\Lambda$. すなわち，14.13 により，$\Lambda\cdot x=\Lambda$.

16.24 $$x, y \in \mathrm{N} \,.\supset.\, \{x\}\cdot y = x\cdot y+y.$$

証明. 16.17 により

$$\{x\}+(x\cdot z+z) = \{x+(x\cdot z+z)\}$$

(16.19 により) $$= \{(x+x\cdot z)+z\}$$

(16.6 により) $$= (x+x\cdot z)+\{z\}.$$

したがって，

$$\{x\}\cdot z = x\cdot z+z \,.\supset.\, \{x\}+\{x\}\cdot z = (x+x\cdot z)+\{z\}$$

(16.8 により) $$\supset.\, \{x\}\cdot\{z\} = x\cdot\{z\}+\{z\}. \qquad (1)$$

16.7 により，$\{x\}\cdot\Lambda = x\cdot\Lambda$. それゆえ，16.5 により，$\{x\}\cdot\Lambda=x\cdot\Lambda+\Lambda$. これと (1) とから帰納法によって，$\{x\}\cdot y = x\cdot y+y$ を推論する.

16.25 $$x \in \mathrm{N} \,.\supset.\, \{\Lambda\}\cdot x = x.$$

証明. 16.24 により，$\{\Lambda\}\cdot x$ は $\Lambda\cdot x+x$ であるが，これは 16.23 と 16.16 によって，x である.

16.26 $$x, y \in \mathrm{N} \,.\supset.\, x\cdot y = y\cdot x.$$

証明. 16.8 と 16.18 により，$x\cdot\{z\}=x\cdot z+x$. 16.24 により，$\{z\}\cdot x=z\cdot x+x$. したがって，

$$x\cdot z = z\cdot x \,.\supset.\, x\cdot\{z\} = \{z\}\cdot x.$$

16.7 と 16.23 により，$x\cdot\Lambda=\Lambda\cdot x$. それゆえ，帰納法により，$x\cdot y=y\cdot x$.

16.27 $x, y, z \in \mathrm{N} . \supset . x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z.$

証明.

$$w \cdot (y+z) = w \cdot y + w \cdot z . \supset . w \cdot (y+z) + (y+z) = (w \cdot y + w \cdot z) + (y+z)$$

(16.19, 16.18 により) $$= (w \cdot y + y) + (w \cdot z + z)$$

(16.24 により) $$\supset . \{w\} \cdot (y+z) = \{w\} \cdot y + \{w\} \cdot z. \quad (1)$$

16.5 により，$\Lambda = \Lambda + \Lambda$. したがって，16.23 により，

$$\Lambda \cdot (y+z) = \Lambda \cdot y + \Lambda \cdot z.$$

これと (1) とから帰納法によって，

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

が帰結する．

16.28 $x, y, z \in \mathrm{N} . \supset . (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

証明. 16.27 と 16.26 により，

$$(w \cdot y + y) \cdot z = (w \cdot y) \cdot z + y \cdot z.$$

したがって，

$$(w \cdot y) \cdot z = w \cdot (y \cdot z) . \supset . (w \cdot y + y) \cdot z = w \cdot (y \cdot z) + y \cdot z$$

(16.24 により) $$\supset . (\{w\} \cdot y) \cdot z = \{w\} \cdot (y \cdot z).$$

また，16.23 により，

$$(\Lambda \cdot y) \cdot z = \Lambda \cdot (y \cdot z).$$

それゆえ，帰納法により，

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

16.29 $x, y \in \mathrm{N} . \supset :. x \cdot y = \Lambda . \equiv : x = \Lambda . \vee . y = \Lambda.$

証明. もしある z に対して $y = \{z\}$ ならば，

$$x \cdot y = \Lambda . \supset . x \cdot \{z\} = \Lambda$$

(16.8 により) $$\supset . x + x \cdot z = \Lambda$$

(16.22 により) $$\supset . x = \Lambda.$$

他方，もしどの z に対しても $y = \{z\}$ でないならば，12.16 により，$y = \Lambda$. 逆に，16.23 によって，$x = \Lambda . \supset . x \cdot y = \Lambda$，かつ，16.7 によって，$y = \Lambda . \supset . x \cdot y = \Lambda$.

16.30 $x, y \in \mathrm{N} . y \neq \Lambda . \supset . x < x + y.$

証明. 仮説と 16.21 により，$x + y \neq x$. しかるに，16.14 により，$x \leqq x + y$. したがって，

13.11 により，$x<x+y$.

16.31 $$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x \leqq y \,.\supset.\, x\cdot z \leqq y\cdot z.$$

証明. 16.26 と 16.27 により，

$$(x+w)\cdot z = x\cdot z+w\cdot z.$$

したがって，

$$(\exists x)(x+w = y) \supset (\exists w)(x\cdot z+w\cdot z = y\cdot z)$$
$$\supset (\exists u)(x\cdot z+u = y\cdot z).$$

それゆえ，16.15 により，

$$x \leqq y \,.\supset.\, x\cdot z \leqq y\cdot z.$$

16.32 $$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, x\cdot z < y\cdot z \,.\supset.\, x < y.$$

証明. 16.31 と 13.22 により，

$$\sim(x < y) \supset \sim(x\cdot z < y\cdot z).$$

16.33 $$x, y, z \in \mathrm{N} \,.\, z \neq \Lambda \,.\, x < y \,.\supset.\, x\cdot z < y\cdot z.$$

証明. 最後の仮説と定義により，$\{x\}\leqq y$. したがって，16.31 により，$\{x\}\cdot z\leqq y\cdot z$. しかるに，また，仮説と 16.30 により，$x\cdot z<x\cdot z+z$，すなわち，16.24 により，$x\cdot z<\{x\}\cdot z$. それゆえ，12.8 により，$x\cdot z<y\cdot z$.

16.34 $$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x\cdot x < y\cdot y \,.\supset.\, x < y.$$

証明. 16.31 と 16.26 により，

$$y \leqq x \,.\supset.\, y\cdot y \leqq x\cdot y \leqq x\cdot x.$$

したがって，13.22 により，

$$\sim(x < y) \supset \sim(x\cdot x < y\cdot y).$$

読者が練習に指数法則を試みるのもよかろう：

$$x^{y+z} = x^y\cdot x^z, \qquad x^{y\cdot z} = (x^y)^z.$$

第2部　高次の数形式

VI. 実　　数

17. プログラム．数の対

クラス理論の記法が，自然数の算術に対しどのようにして十分なのであるかを，われわれは見てきた．それは，また，それ以上の種類の数にも十分である．われわれの考察を有理数(当座の便宜上，負の数は除いて)へ向けよう．

自然数のあいだの比を表現するために有理数を用いるからといって，われわれが有理数を附加的な対象として認めるように要求されることは，まったくないのである．x は y の u/v であること，あるいは $x/y=u/v$ をいうことは，次のように自然数論の範囲内で語りうることをいっているにすぎない：$x \cdot v=y \cdot u$．また，$x/y<u/v$ をいうことは，$x \cdot v<y \cdot u$ をいっているにすぎない．事実，有理数のあいだの比を自然数論の範囲内で表現することさえできる；なぜなら，x/z が y/w の u/v であるということは，$x \cdot v \cdot w=y \cdot u \cdot z$ をいっているにすぎないからである．加法および乗法が有理数に拡張されても事態は変らない；なぜなら，「$(x/z) \cdot (y/w)$」および「$(x/z)+(y/w)$」は，「$(x \cdot y)/(z \cdot w)$」および「$(x \cdot w+z \cdot y)/(z \cdot w)$」の違った書き方にすぎないからである．ここまでの範囲では，有理数の仮理論は，自然数の実理論に帰着し，満足のゆくものである．

有理数の巾は，きわめて異なる事柄である．$(u/v)^{z/w}$ を容易に片づける方法はない．だが，ここで，困難というのは，われわれが(自然数 u, v, z, w のほとんどの選択に対して)有理数域を超えて無理数へと連れさられるということである．

われわれが，単に自然数から有理数へ移行しているかぎりでは，われわれの移行は，単なる文体上の変形として説明しつくすことができるようなものである．これらすべての数がいかなる種類のものであるべきかという重大な問いが生ずるのは，われわれが，一般に，実数を考慮に入れるようになり，かくして有理数に無理数をまぜ合せるときである．まず，この無理数の混入が，どのような系列構造を構成すると想定されるかを，考えてみよう．

ある数は，クラス α のどのメンバーもそれを超えないならば，数のクラス α の(上)**界**((upper) *bound*)である．それは，α のメンバーであるかもしれないし，ないかもしれない；もしメンバーであるなら，それは，もちろん，最大のメンバーである．実数のクラスは，同時に，有界でしかも無限であってよい；ひとつの例は，1/3 と 2/3 のあいだの有理数のクラスである，なぜなら，それは無限に多くの有理数をもち，しかも，たとえば，3/4 に

よって，有界である．また，それを有界にする最小の有理数：2/3，がある．つぎに，その平方が2より小さい有理数のクラスというのを考えてみよう；このクラスも上界，たとえば，3/2をもつ．だが，それは最小上界としての有理数をもたない．その平方 $(x \cdot x)/(y \cdot y)$ が2を超えるような最小の有理数 x/y は存在しないし，また，その平方が2を超えない最大の有理数というものも存在しない．さて，実数の全領域を有理数だけのそれから区別するものは，有理数の領域に欠けているさまざまな最小上界——いわゆる無理数——がそのうちに投げこまれているということである．たとえば，その平方が2より小さい有理数のクラスは，有理数の最小上界をもたないのに反して，無理数のそれ：$\sqrt{2}$，はもっている．一般に，

(i) いやしくも有理数の上界を有する有理数のおのおののクラスに対して，その最小上界であるような実数が存在する．

すでに注意したように，有理数を対象化することは，実数一般を解釈するためのステップとして以外，ほとんど意味をもたない．そこで，(i)によって要求されている無理数の挿入を促がすような有理数の表現法を求めてみよう．

有理数 x/y 一般を，単に $\langle x, y\rangle$ と解するのは，$\langle 2, 3\rangle \neq \langle 4, 6\rangle$ に反して，$2/3=4/6$ はわれわれは欲しているのであるから，満足のゆくものではない．有理数を，つねに，『最小の項における』それに対応する順序対ととることによって，この点を調整することもできよう：かくして，

$$2/3 = 4/6 = \langle 2, 3\rangle \neq \langle 4, 6\rangle.$$

他の方法は，2/3 を，$\langle 2, 3\rangle$, $\langle 4, 6\rangle$, $\langle 6, 9\rangle$, 等々，のすべての対のクラスととることであろう；これは，x/y 一般を，

$$\{\langle z, w\rangle : z, w \in \mathrm{N} \,.\, x \cdot w = z \cdot y\}$$

と定義することを意味しよう．ペアノの表現法(1901)とは，そのようなものであった．だが，これらの表現法のどちらも，無理数のきわめて自然な挿入方法を用意するものではない．

これらの表現法のより一層明らかな欠点は，それらが $x/1$ を x から区別することである．だが，基礎的な研究においては，このような不粋を甘受し，かくして，自然数とそれに対応する整の有理数との人為的な区別を容認するのが便利であり，かつ普通でもある．

しかしながら，無理数の挿入方法を用意したいという欲求からして，x/y の第3の表現

法のほうが好ましい；すなわち：

$$\{\langle z, w\rangle : z, w \in \mathrm{N} \,.\, z\cdot y < x\cdot w\}.$$

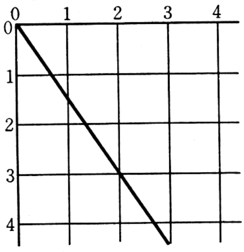
この表現の下では——それを，直観的に，一種循環的ないい方にすると——x/y は，$z/w<x/y$ なる自然数 z および w の対から成るクラスである．とくに，有理数 $0/1$ は Λ に，かくして，事実上，0 になる；他方，有理数 1 あるいは $1/1$ は，自然数のあいだの大小関係となる．

有理数のこの表現法が無理数の挿入に適していることは，次のようにして理解できる．x/y が $z/w<x/y$ なる対 $\langle z, w\rangle$ を含むのとちょうどおなじように，$z/w<\sqrt{2}$ なる対 $\langle z, w\rangle$ を含むものとして $\sqrt{2}$ をはめこんでよい．この性格づけは，循環をとくと：

$$\sqrt{2} = \{\langle z, w\rangle : z, w \in \mathrm{N} \,.\, z^2 < 2w^2\}$$

となる．

自然数の対は，平面の一象限をおおう格子の交点として描ける．対 $\langle x, y\rangle$ とは，横に x 箇所，下に y 箇所である．すると，x/y は，われわれがいまそれを解釈しているように，原点 $\langle 0, 0\rangle$ から $\langle x, y\rangle$ を通る線の下(『の西南』)にあるすべての交点のクラスである．かくして，$\dfrac{2}{3}$ は，図表で示されている線の下にあるすべての交点のクラスである．無理数は，おなじように，線によって，ただし原点以外にどの交点も通らない線によって，区画される．



(0を除く)有理数と無理数は，このように考えると，自然数の順序対の無限クラスである．それゆえ，途中のどこかで，いくつかの適当な存在公理をつけ加えねばならないとわれわれは見こんでよい；なぜなら，今までのわれわれの公理は有限クラスだけを与えるからである．現に，われわれが考えている定義を調整して，これらそれ以上の存在要求を，有限にはしないまでも，表面上では少しばかり簡単にするようなひとつの方法がある．す

なわち，われわれは，有理数と無理数を自然数の対というよりは，むしろ，単に自然数のクラスとして解釈しなおすことができる．なぜなら，自然数の順序対は，一箇の自然数 $\langle x, y\rangle$ を表わしている $x+(x+y)^2$ によって，一義的に表わせるからである．

これが自然数の対を表わす適当な方法であることは，z が自然数である場合，$z=x+(x+y)^2$ なるそれぞれの自然数 x および y（もし，そのようなものがあれば）を一義的に見出しうることを反省してみれば分る．なぜなら，$(x+y)^2$ は，$z\geqq$ なる最大の平方である；x は z マイナスその平方である；そして，y はその平方根マイナス x である．

19 世紀の順序対的な記法，「$x;y$」，を利用して，対応する数 $x+(x+y)^2$ に言及しよう．

17.1　　「$\alpha;\beta$」は「$\alpha+(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)$」を表わす．

自然数に関するかぎり，この算術的関数が順序対の目的にかなうというのが，次の二つの定理の内容である．

17.2　　$x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, x;y = z;w \,.\supset.\, x = z \,.\, y = w.$

証明. 10.26 により，$\Lambda\neq\{x+y\}$. したがって，16.30 により，

$$x;y < x;y+\{x+y\}$$

(16.14 により)	$\leqq (x;y+\{x+y\})+y$
(17.1 により)	$= ((x+(x+y)\cdot(x+y))+\{x+y\})+y$
(16.18, 16.19 により)	$= \{x+y\}+((x+y)+(x+y)\cdot(x+y))$
(16.8 により)	$= \{x+y\}+(x+y)\cdot\{x+y\}$
(16.26, 16.8 により)	$= \{x+y\}\cdot\{x+y\}.$　　(1)

16.14 と 17.1 により，$(z+w)\cdot(z+w)\leqq z;w$. したがって，

$$x;y = z;w \,.\supset.\, (z+w)\cdot(z+w) \leqq x;y$$

((1) により)	$< \{x+y\}\cdot\{x+y\}$
(16.34 により)	$\supset.\, z+w < \{x+y\}$
(13.12 により)	$\supset.\, z+w \leqq x+y.$

同様に，

$$z;w = x;y \,.\supset.\, x+y \leqq z+w.$$

したがって，結合すれば，

$$x;y = z;w \,.\supset.\, x+y \leqq z+w \leqq x+y$$

(13.21 により)	$\supset.\, x+y = z+w$　　(2)

(17.1 により) $\supset . z;w = z+(x+y)\cdot(x+y).$

しかし，そのとき

$$x;y = z;w . \supset . x;y = z+(x+y)\cdot(x+y)$$

(17.1 により) $\supset . x+(x+y)\cdot(x+y) = z+(x+y)\cdot(x+y)$

(16.20 により) $\supset . x = z.$

だが，そのとき，(2)により，

$$x;y = z;w . \supset . x+y = x+w$$

(16.18, 16.20 により) $\supset . y = w.$

17.3 $x, y, z, w \in \mathrm{N} . \supset : x;y = z;w . \equiv . x = z . y = w.$

証明は 17.2 から明らか.

関係に対する具体化の法則，9.5，に対応して，われわれはいま次の定理型を有する：

17.4 $z, w \in \mathrm{N} . \supset : z;w \in \{x;y: x, y \in \mathrm{N} . Fxy\} . \equiv Fzw.$

証明. 9.4 により

$$z;w \in \{x;y: x, y \in \mathrm{N} . Fxy\} . \equiv (\exists x)(\exists y)(x, y \in \mathrm{N} . Fxy . z;w = x;y)$$

(仮説と 17.3 により) $\equiv (\exists x)(\exists y)(x, y \in \mathrm{N} . Fxy . z = x . w = y)$

(6.1 により) $\equiv . z, w \in \mathrm{N} . Fzw$

(仮説により) $\equiv Fzw.$

18. 解釈された有理数と実数

このように装備して，x/y に戻ろう．いまでは，それを直接に自然数から成るクラスとして定義できる：

18.1 「α/β」は「$\{z;w: z, w \in \mathrm{N} . z\cdot\beta < \alpha\cdot w\}$」を表わす.

この定義と 17.4 から，

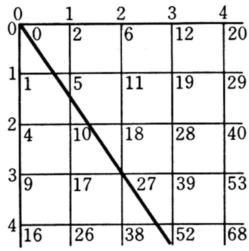
18.2 $z, w \in \mathrm{N} . \supset : z;w \in x/y . \equiv . z\cdot y < x\cdot w$

をうる．それから，次式が結果する.

18.3 $x, y \in \mathrm{N} . \supset . x;y \notin x/y.$

証明. 仮説，16.12，および 13.20 により，$\sim(x\cdot y < x\cdot y)$．したがって，仮説と 18.2 により，$x;y \notin x/y.$

われわれがいま交点を順序対 $\langle x, y\rangle$ とみなすことをやめて，それら交点をそれに対応する自然数 $x;y$ とみるようになることを除けば，有理数と無理数のわれわれの図表的表示は変らない．自然数は，いまや，格子の垂直線と水平線およびそれらの交点に割りあてられる；図表参照．このようにして，$\dfrac{2}{3}$ は，いまや，そのメンバーが 1, 4, 9, 10, 16, 17, 25, 26, 36, 37, 38, 49, 等々，であるようなクラスである．



有理数，そして，事実，われわれが解釈しつつあるような実数は一般に，あきらかに入れ籠型(*nested*)クラスである：つまり，おのおののクラスは，その上のおのおののクラスの部分クラスである．結合子「⊆」それ自体が，われわれの実数のあいだでは，古典的な「≦」の目的にかなう．われわれがさきに定義した記号「≦」は，実数(あるいは有理数)ではなく，自然数を順序づけるものであることを記憶しなければならない．われわれは，実際，それを自然数に対してだけでなく，きわめて一般的に，事実 $^*\iota$ として，定義した；だが，$^*\iota$ が古典的な「≦」の作用をするのは，自然数のあいだだけであって，実数のあいだではない．そして，「⊆」が古典的な「≦」の作用をするのは，実数のあいだであって，自然数のあいだではない．

古典的な法則：

$$x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, w \neq 0 \,.\supset:\, x/y \leqq z/w \,.\!\equiv\!.\, x\cdot w \leqq z\cdot y$$

は，それゆえ，次の諸定理に反映されるが，これらの定理は，実数の順序づけを自然数のそれと対等とするのに役だつ．

18.4 $\qquad x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, x/y \subseteq z/w \,.\supset.\, x\cdot w \leqq z\cdot y.$

証明．18.3 により，$z;w \notin z/w$．しかるに，仮説により，$x/y \subseteq z/w$．したがって，$z;w \notin x/y$．それゆえ，18.2 により，$\sim(z\cdot y < x\cdot w)$．したがって，13.22 により，$x\cdot w \leqq z\cdot y$．

18.5 $\qquad x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, w \neq \Lambda \,.\, x\cdot w \leqq z\cdot y \,.\supset.\, x/y \subseteq z/w.$

証明. 仮説と 16.31 により，任意の $v \in \mathrm{N}$ に対して，

$$(x \cdot w) \cdot v \leqq (z \cdot y) \cdot v. \tag{1}$$

仮説と 16.33 により，任意の $u, v \in \mathrm{N}$ に対して，

$$u \cdot y < x \cdot v \,.\supset.\, (u \cdot y) \cdot w < (x \cdot v) \cdot w$$

(16.28, 16.26 により) $\supset. (u \cdot w) \cdot y < (x \cdot w) \cdot v$

((1), 12.8 により) $\supset. (u \cdot w) \cdot y < (z \cdot y) \cdot v$

(16.28, 16.26 により) $\supset. (u \cdot w) \cdot y < (z \cdot v) \cdot y$

(16.32 により) $\supset. u \cdot w < z \cdot v.$

したがって，18.2 により，

$$u ; v \in x/y \,.\supset.\, u ; v \in z/w.$$

しかるに，18.1 により，x/y の任意のメンバーは，ある $u, v \in \mathrm{N}$ に対して，$u;v$ である．それゆえ，$x/y \subseteq z/w$.

18.5 において，「$w \neq \Lambda$」のかわりに「$z \neq \Lambda$」を用いることができる．すなわち，

18.6 $\qquad x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, z \neq \Lambda \,.\, x \cdot w \leqq z \cdot y \,.\supset.\, x/y \subseteq z/w.$

証明. もし $w \neq \Lambda$ なら，18.5 で間にあう；したがって，$w = \Lambda$ と仮定しよう．12.18 により，

$$u \cdot y < x \cdot v \,.\supset.\, x \cdot v \neq \Lambda$$

(16.7 により) $\supset. v \neq \Lambda$

(仮説と 16.29 により) $\supset. z \cdot v \neq \Lambda$

(13.16 により) $\supset. \Lambda < z \cdot v$

(16.7 により) $\supset. u \cdot \Lambda < z \cdot v$

($w = \Lambda$ なので) $\supset. u \cdot w < z \cdot v.$

証明は，18.5 の証明のように終る．

18.4—18.6 を結合すれば，

18.7 $\qquad x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, \sim(z = w = \Lambda) \,.\supset:\, x/y \subseteq z/w \,.\equiv.\, x \cdot w \leqq z \cdot y.$

これから，こんどは，その系をうる．

18.8 $\qquad x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, \sim(z = w = \Lambda) \,.\supset:\, x/y \subseteq z/w \,.\equiv.\, z ; w \notin x/y.$

証明. 仮説と 18.7 により，

$$x/y \subseteq z/w \,.\!\equiv.\, x\cdot w \leqq z\cdot y$$

(13.22 により)　$\equiv \sim(z\cdot y < x\cdot w)$

(18.2 により)　$\equiv.\, z;w \notin x/y.$

注意したように，整の有理数は，一般に，それに対応する自然数とは異なる．自然数を x とするとき，整の有理数は $x/1$ または $x/\{\Lambda\}$ である．一致は 0 においてのみおこる；0/1 あるいは $\Lambda/\{\Lambda\}$ が，単に Λ，あるいは 0 であることは，18.1 から容易に分る．実際，あらゆる自然数 x に対して，Λ に対してさえ，$\Lambda/x=\Lambda$ であること，および，$x\neq\Lambda$ なる自然数 x に対してのみ $x/\Lambda=\{\Lambda\}/\Lambda$ であることは，18.1 から明らかである．かくして，伝統的に不可解な 0/0 は，われわれの構成によれば，たまたま，0 になってしまうということがおこる．格子で表わせば，0/1 または Λ は，垂直線の左の交点を含む，それゆえ，いかなる交点も含まない．一方，他の極端では，1/0 または $\{\Lambda\}/\Lambda$ は，水平線の下のすべての交点を，かくして，上のへりにある交点を除いたすべての交点を含む．この最後の注意が次の定理の趣旨である．

18.9　$$\{\Lambda\}/\Lambda = \{x;y:\ x, y \in \mathrm{N}\,.\, y \neq \Lambda\}.$$

証明．16.7 と 16.25 により，

$$x\cdot\Lambda < \{\Lambda\}\cdot y \,.\!\equiv.\, \Lambda < y.$$

したがって，13.17 により，

$$y \in \mathrm{N} \,.\!\supset:\, x\cdot\Lambda < \{\Lambda\}\cdot y \,.\!\equiv.\, y \neq \Lambda.$$

それゆえ，18.1 により，われわれの定理をうる．

だが，有理数のクラスを定義するときには，1/0 を標準的な例外とする，かくして：

18.10　「Rat」は「$\{x/y: x, y \in \mathrm{N}\,.\, y \neq \Lambda\}$」を表わす．

1/0 がそれによって排除されていることは，やはり，少しばかり証明を要する，そこで：

18.11　$$\{\Lambda\}/\Lambda \notin \mathrm{Rat}.$$

証明．$\{\Lambda\}/\Lambda \in \mathrm{Rat}$ と仮定しよう．すると，18.10 により，$y\neq\Lambda$ かつ $x/y=\{\Lambda\}/\Lambda$ なる $x, y \in \mathrm{N}$ がある．しかし，そのとき，$\{\Lambda\}/\Lambda\subseteq x/y$，したがって，18.7 により，$\{\Lambda\}\cdot y\leqq x\cdot\Lambda$，すなわち，16.7 と 16.25 により，$y\leqq\Lambda$，すなわち，12.17 により，$y=\Lambda$，これは矛盾である．

つぎに，実数は，有理数と，さらに，有理数の有界なクラスの最小上界を含まねばならなかった（§17 参照）．だが，このいい方は余計なものを含んでいる；任意の有理数 w は，

それ自身，有理数の有界なクラス，すなわち，$\{w\}$，の最小上界である．したがって，単に，実数は有理数の有界なクラスの最小上界である，といってよい．このことのはっきりした定式化は，いまや，容易にえられる．「⊆」は，実数に対して古典的な「≦」の役割を演ずるので，有理数のクラス z のひとつの上界は，単に，

$$(x)(x \in z \,.\!\supset .\, x \subseteq y),$$

あるいは，簡単に，$\cup z \subseteq y$ (8.5参照)なる任意の y として記述できる．かくして，とくに，$\cup z$ は，それ自身，z のひとつの上界であり，⊆ おのおのの上界，であるから，$\cup z$ は最小上界である．したがって，実数は，ある有理数の上界をもつある $z \subseteq \mathrm{Rat}$ に対して，$\cup z$ であるような任意のものである．さて，z がある有理数の上界をもつことは，

$$(v)(v \in z \,.\!\supset .\, v \subseteq x/y)$$

なるある有理数 x/y が存在することである．すなわち，18.8により，

$$(v)(v \in z \,.\!\supset .\, x;y \notin v),$$

すなわち，$x;y \notin \cup z$ なるある有理数 x/y が存在することである．それは，$\cup z$ が，すべての有理数 x/y に対して $x;y$ を含む場合——要するに，$\cup z$ が $\{\Lambda\}/\Lambda$ (18.9参照)である場合——を，排除しているにすぎない．そこで，

18.12 「Real」は「$\{\cup z : z \subseteq \mathrm{Rat}\} \cap {}^{-}\{\{\Lambda\}/\Lambda\}$」を表わす．

たったいま，われわれを18.12へ導いた推理のひとつのステップは，有理数が特別の準備なしに実数とみなされるだろうという認識であった．このことを定理としよう．

18.13 $\mathrm{Rat} \subseteq \mathrm{Real}.$

証明．任意の $u \in \mathrm{Rat}$ を考えよう．すると，$\{u\} \subseteq \mathrm{Rat}$；さらに，8.2により，$u = \cup\{u\}$；したがって，$u \in \{\cup z : z \subseteq \mathrm{Rat}\}$．さらに，18.11により，$u \neq \{\Lambda\}/\Lambda$．それゆえ，18.12により，$u \in \mathrm{Real}$.

実数の私の表現法の背後にある基礎的なアイディアは，デデキントまでさかのぼるが，彼は1872年に，おのおのの実数がどのように有理数の列のある**切断**(*cut*)：つまり，その実数より小さい有理数をそうでない有理数から分離する切断，に対応するかを指摘した．われわれは，いくつかの切断の下にある有理数のそれぞれのクラスにのみ注意し，それらの切断そのものには注意を払わずに，おのおのの実数を，有理数のあるクラス：つまり，有理数の，メンバーより小さいすべての有理数を含むという意味で充実し(*solid*)，最大の

メンバーをもたないという意味で開いて(*open*)おり，しかも，無尽蔵な(*inexhaustive*)クラス，に対応させる.

ホワイトヘッドとラッセル(*310, *314)は，実数の二つの表現法を組織的に展開した. ひとつの表現法では，実数はいまのべた有理数のクラスと同一視された. かくして，おのおのの実数 x は，直観的にいえば，$x>$ なるすべての有理数のクラス z となった. もうひとつの表現法では，x は，むしろ，$\cup z$: かくして，直観的にいえば，$x>$ なるすべての有理数の合併，となった. したがって，実数の私の表現法は，ひとつの重要な細目で，ホワイトヘッドとラッセルのこの第2の表現法に従っている：実数は有理数と同等である，それらは有理数のクラスではなく有理数の合併である. 実数は，有理数がそれらのクラスであるような事物から成るクラスである. だが，私の表現法は，もうひとつの重要な細目で，ホワイトヘッドとラッセルの第2の表現法からさえ異なっている：私にとっては，有理数は，それ自身，実数である，ホワイトヘッドとラッセルにとっては，そうではない. そうでないという理由は，ホワイトヘッドとラッセルの有理数が，フレーゲの有理数(§17参照)同様に，依然として相互に共通のメンバーをもたなかった，のに反して，彼らの実数は入れ籠型であった，ということである.

一般に，これらの事柄についての著者たちにとってと同様に，私にとっても，自然数は整の有理数ではない；自然数は整の有理数によって模倣されているにすぎない. ホワイトヘッドとラッセルにとっては，彼らのどちらの表現法においても，おなじように，有理数は有理実数ではない；有理数は有理実数によって模倣されているにすぎない. 他方，私にとって，有理数は実数である. そして，上述の歴史的素描の言葉を用いれば，その本質的な理由というのは，まさに，私が，ホワイトヘッドとラッセルの第2の表現法の実数を，有理数の名称と記法とを用いずに正確に構成しようと工夫し，それゆえ，その名称と記法を有理実数そのものに保留しておくことができた，ということなのである.

このような歴史的関連を明らかにしようとする際に，私は相違点についてはあまり触れなかった. そのひとつは，ホワイトヘッドとラッセルの有理数は，ペアノの有理数のような数のあいだの関係ではなく，関係のあいだの関係であった，ということである. もうひとつは，自然数のクラスのカテゴリーまで実数をひきおろすために，〔順序〕対 $\langle x, y\rangle$ のかわりに数 $x;y$ を私が用いていることである[1]. このような措置が明らかにしている理論

1 有理数と実数の私の表現法は，この特徴をもってはいないが，『Element and number』, §4，脚註，に現われていた.

上重要な二つの点は，カントールに由来する：すなわち，実数は自然数のクラスと対応づけられうるということ，および自然数の〔順序〕対は自然数に対応づけられうる，ということである．

19. 存在要求. 演算と拡張

§17 で最小上界の法則(i)を書きとめたが，それを実現するのが実数概念を展開することの主たる目的であった．実数のわれわれの最終的定義 18.12 はその目的を達成したように見えるかもしれない．なぜなら，われわれは，18.12 が，有理数かあるいはある有理数の上界をもつ有理数のあるクラス z の最小上界 $\bigcup z$ であるようなあらゆるものを実数とするのを，見たからである．実際には，これは，§17 の(i)を保証するのには十分ではない，というのは，すべてのそのような z に対して $\bigcup z$ が存在するという保証はないからである．この存在仮定が §17 の(i)の残余の内容である，そこで，あらたに，それに番号をつけることにしよう：

(i) $$z \subseteq \mathrm{Rat} \,.\, \bigcup z \neq \{\Lambda\}/\Lambda \,.\supset .\, \bigcup z \in \mho.$$

もしわれわれの定義を基礎にして実数の古典的な理論が獲得されるべきであるならば，それは，包括化公理としてつけ加えられねばならないか，あるいは，より広い包括化公理によってまかなわれなければならない．それに代る定義は知られているが，しかし，あきらかにより弱い存在仮定から古典的な理論を獲得させうるような定義を，私は知らない．

実際に，(i)は，おのずから，われわれが公理 7.10 および公理型 13.1 ですでに措定した有限クラス以上にはなにも存在しない，ということと両立可能である．なぜなら，任意の有理数 x/y は，それが Λ となってしまうような x が Λ である場合を除けば，自然数の無限クラスである．したがって，有限クラスだけが存在するならば，$\mathrm{Rat}=\{\Lambda\}$．だが，そのときは，すべての $z \subseteq \mathrm{Rat}$ に対して，$\bigcup z=\Lambda$，したがって，$\bigcup z \in \mho$，これは(i)を満足する．

この反省は，しかしながら，実数の満足のいく理論の諸目的には(i)に加えてもうひとつの存在仮定を必要とする，という確信を新にはしないまでも，思い出させてはくれる．われわれは，また，あらゆる有理数 x/y の存在を供給する必要がある，かくして：

(ii) $$x, y \in \mathrm{N} \,.\, y \neq \Lambda \,.\supset .\, x/y \in \mho.$$

これは，たしかに，無限クラスの存在を主張している；そして(i)は，(ii)によって支持

されるとき，さらにそれ以上の無限クラスの存在を主張している．(ii)は，18.1 の意味でのすべての有理数の存在を主張し，したがって，18.10 のような Rat をそのようなすべての有理数のクラスとする，そして，そうでなかったとしたら，Rat はそのようなすべての有理数のクラスではなくなってしまったであろう．そのときには(i)はすべての無理数の存在をもまた主張しつづけ，したがって，18.12 のような Real を，実際に，すべての実数のクラスとしている．最小上界の法則は，(ii)によって支持されるとき，すべての無理数の存在の法則にすぎない．もちろん，(ii)と(i)とが認められたとしても，Rat $\in \mathfrak{V}$ あるいは Real $\in \mathfrak{V}$ というようなことは仮定されていない．

私は，まだ，(i)と(ii)が公理だと宣言してはいない．私は，それらを，究極的には，与えたいと思っている法則として示しているにすぎない．

実数の古典的な理論は(i)よりももっと一般的でさえあるような最小上界の法則を含んでいる．そのような法則は，単に有理数だけではなく，一般に実数のクラスについて語っている，かくして：

いやしくも有理数の上界をもつ実数のおのおののクラスに対して，その最小上界である実数が存在する．

このとき，(i)のかわりに：

(iii) $$z \subseteq \mathrm{Real} \,.\, \bigcup z \neq \{\Lambda\}/\Lambda \,.\!\supset\!.\, \bigcup z \in \mathfrak{V}$$

を，われわれはもつべきである．この最小上界の法則の表現法は，もうひとつの表現法になにもつけ加えていないということが，通常，指摘される．与えられているその理由というのは，実数の任意のクラスの最小上界は，同時に，純粋に有理数のクラスの最小上界であるということである．事実，(i)あるいは(ii)あるいは他の特殊な仮定から独立に，次式を証明できる．

19.1 $$\alpha \subseteq \mathrm{Real} \,.\!\supset\!.\, \bigcup\alpha = \bigcup(\mathrm{Rat} \cap \{w : w \subseteq \bigcup\alpha\}).$$

証明. $\bigcup\alpha$ の定義により，

$$x \in \bigcup\alpha \,.\!\supset (\exists u)(x \in u \in \alpha)$$

(仮説により) $\supset (\exists u)(x \in u \in \alpha \,.\, u \in \mathrm{Real})$

(18.12 により) $\supset (\exists z)(x \in \bigcup z \in \alpha \,.\, z \subseteq \mathrm{Rat})$

($\bigcup z$ の定義により) $\supset (\exists z)(\exists w)(x \in w \in z \subseteq \mathrm{Rat} \,.\, \bigcup z \in \alpha)$

(8.6 により) $\supset (\exists z)(\exists w)(x \in w \subseteq \bigcup z \subseteq \bigcup\alpha \,.\, w \in \mathrm{Rat})$

$$\supset (\exists w)(x \in w \subseteq \bigcup\alpha \,.\, w \in \mathrm{Rat})$$

(「∪」の定義により) $\supset .\, x \in \bigcup(\mathrm{Rat} \cap \{w : w \subseteq \bigcup\alpha\})$.

逆に，「∪」の定義により，

$$x \in \bigcup(\mathrm{Rat} \cap \{w : w \subseteq \bigcup\alpha\}) \,.\supset (\exists w)(x \in w \subseteq \bigcup\alpha)$$
$$\supset .\, x \in \bigcup\alpha.$$

古典的な論点は，要するに，実数のクラスが有理数のクラスによってすでに決定されてはいないような極限あるいは最小上界を決定しない，ということである．

しかし，実際には，19.1にもかかわらず，(i)が(iii)を含意することは知られていない．われわれは，(i)と19.1からどのようにして(iii)を議論しようとするだろうか．まず，(i)の「z」に「$\mathrm{Rat} \cap \{w : w \subseteq \bigcup z\}$」を代入しようとするであろう．だが，この代入は，少くとも(iii)の前件を満足するすべての z に対して，

(iv) $$\mathrm{Rat} \cap \{w : w \subseteq \bigcup z\} \in \mho$$

を前提している．

(iii)を保証するために(i)を(iv)で補なうかわりに，最初にまず，(i)ではなくて(iii)に注目するほうがより要点にかなっている．18.13によれば，あきらかに，(iii)は(i)を含意する．

(iii)を保証する別の方法は，(i)という文のかわりに，それに対応する〔言明〕型：

(v) $$\alpha \subseteq \mathrm{Rat} \,.\, \bigcup\alpha \neq \{\Lambda\}/\Lambda \,.\supset .\, \bigcup\alpha \in \mho$$

を採用することによる．なぜなら，ここでは，存在とは無関係に，「α」についてのわれわれの希望の代入をおこなうことができ，したがって，(iv)によらずに，(iii)を導出できるからである．

そこで，われわれが定義したような実数の理論に適合する最終的な包括化の諸公理の組は，(ii)と(iii)を含むか，もしくは，それらを定理として含意しなければならない；そして，それらを定理として提供できるひとつの方法は，(ii)を定理として，また，(v)を定理型として供給することによる．

〔言明〕型(v)と文(i)とを比較すると，類推によって，それ以上の〔言明〕型：

(vi) $$\alpha \subseteq \mathrm{Real} \,.\, \bigcup\alpha \neq \{\Lambda\}/\Lambda \,.\supset .\, \bigcup\alpha \in \mho$$

が暗示されるが，これは，(v)が(i)に関係づけられるのと同様に，文(iii)に関係づけられ

る．しかし，これは(v)になにも加えない．(v)への代入は：

$$\bigcup(\mathrm{Rat}\cap\{w:w\subseteq\bigcup\alpha\})\neq\{\Lambda\}/\Lambda\,.\supset.\,\bigcup(\mathrm{Rat}\cap\{w:w\subseteq\bigcup\alpha\})\in\mho$$

を与えるが，これから，19.1によって，(vi)をうる．

したがって，実数の理論に対するちょうど二つのタイプの最終的な規定が現われる：(ii)と(v)，および，それとともに暗黙のうちに(vi)を提供するという強い規定，および，(ii)と(iii)を提供するという弱い規定．

これらすべて——(ii), (iii), (v)およびそれらの帰結——は，Nの部分クラスのみの存在を肯定する．したがって，これらの要求は，単に，$\alpha\subseteq\mathrm{N}\,.\supset.\,\alpha\in\mho$を，あるいは，事実，

(vii) $$\alpha\subset\mathrm{N}\,.\supset.\,\alpha\in\mho$$

を仮定することによって満足されうる．しかし，これは，(iii)はさておき，(ii)と(v)に対しては必要以上に強い．

有理数の列に最小上界を混入することによって達せられるものは，**連続性**(*continuity*)とよばれる．もと〔混入前〕のより弱い性質は，**稠密性**(*density*)とよばれる：それは，つまり，単に，任意の二つの〔数の〕あいだに，つねに，それ以上の数があるということにすぎない性質である．一般に，関係x，たとえば，有理数あるいは実数間の大小関係は，もし$x\subseteq x|x$なら，稠密であるとよばれる．それに加えて(順序づけxに関して)有界なあらゆるクラスが(xに関して)最小上界をもつなら，連続であるとよばれる．したがって，実数のあいだの大小関係は連続であるが，有理数に限定されるときには連続でない．実数は**連続体**(*continuum*)を構成する，といわれる．

最後に，和と積について一言．これらと巾とは，自然数に対しては16.1—16.3で定義された．それらの定義は自然数以外のものに適用されても意味はあったが，しかし，それは取るに足りない意味であった；それらはΛを与えた(16.4参照)．三つの演算は，もちろん，実数に対してあらたに定義されねばならない，そして，実際上はともかく，原理的には，自然数についてのそれに対応する演算を表現するのとは異なる記号で表わさるべきである．そこで，当分のあいだ，xとyとの実数に適当な意味での和および積に対して，「$x\oplus y$」および「$x\odot y$」と書くことにしよう．私は，これらの定義方法を示すのに十分な程度にだけ，この主題を追求することにする．

実数xとyが，たまたま，ともに有理数，h/kとm/n，である場合には，困難はない；希望したような意味での$x\oplus y$，$x\odot y$が$(h\cdot n+m\cdot k)/(k\cdot n)$と$(h\cdot m)/(k\cdot n)$であることを，

われわれは知っている．ところで，いまは，x あるいは y が無理数であるかもしれない一般的な場合を考えよう．まず，$x \odot y$ の問題にとりかかろう．$x \odot y$ は，直観的にいえば，z/w が $x \odot y$ より小さいすべての自然数 $z;w$ のクラスであって欲しい(18.8参照)．だが，古典的な算術においては，まさしく z/w 自身が，それぞれ，x および y より小なる有理数 h/k および m/n の積として表現されうる場合に，z/w はそうなるのである．しかるに，h/k が x より小なのは，$h;k \in x$ なる場合である；m/n に対しても同様である；そして，それらの積が $(h \cdot m)/(k \cdot n)$ であることを見た．したがって，$x \odot y$ を，

$$\{(h \cdot m);(k \cdot n) : h, k, m, n \in \mathrm{N} \,.\, h;k \in x \,.\, m;n \in y\}$$

と定義してもよいであろう．同様な推理から，$x \oplus y$ を，

$$\{(h \cdot n + m \cdot k);(k \cdot n) : h, k, m, n \in \mathrm{N} \,.\, h;k \in x \,.\, m;n \in y\}$$

と定義することになる，ただし，x あるいは y が $0/1$，または Λ である場合，この表現法は駄目になる．というのは，x あるいは y が Λである場合，あきらかに，この表現法は Λ に帰してとり返しがつかないが，一方，われわれが欲しているものは $x \oplus \Lambda = x$ および $\Lambda \oplus y = y$ である．しかしながら，これらのケースは，「$\cup x \cup y$」を上の定式化に添えることによって調整されうる；この改訂は，二つの扱いにくいケースを救い，他のケースにはなんの影響ももたらさない．

われわれは，集合論的用語で算術的記法を解釈しなおして，算術の真理を集合論の真理へ移す方法を与えたときに，集合論における算術の**モデル**(*model*)を与えたのである．さて，実際に，数を集合論に還元する(*reduce*)には，そのような形式的な模造以上に何が要求されるであろうか？　それらの応用という問題もまたあるように思われる；かくして，自然数の場合には，クラスの測定という問題があるようにみえる．しかし，§12のはじめに，自然数に対しては，これは，なんら，要求を追加するものではないことを注意した；自然数のどの表現法も，それが形式的法則を満足したとすれば，クラスの測定に適しているであろう．さて，ほとんどおなじことが実数についてもいえる：それらが，たとえば，物理的世界におけるいろいろな連続量に対応づけられることによって応用されるとき，どのモデルもおなじように適用されうるであろう．応用に関係のあるすべての特徴は，モデルへ移しいれられるから，モデルの構成(modeling)は，再び，還元と同等であることが分る．

次の三章において，おなじことが無限順序数および無限カーディナル数についても真で

ある，ことがあきらかになるであろう：どのモデルもすべての応用の役にたつから，支持しうる解釈(version)である．そして，より直接の関心事についていえば，われわれの実数体系に対するよく知られている追加物，すなわち，負数と虚数についてもおなじことが真である．私は，次の若干の段落をこれらに向けよう．

おのおのの実数 x に対して，正の実数 $+x$ および負の実数 $-x$ を，任意に順序対 $\langle x, 0\rangle$ および $\langle 0, x\rangle$ と解釈することによって，符号のついた実数，あるいは，正と負の実数の算術のモデルを獲得することができる．これは，x が 0 であるとき，かつそのときにかぎって，望み通りに，$+x=-x$ を与える．すると，符号つきの実数に適した「<」の新しい定義は，次のアイディアにもとづいて構成されうる：

$$\langle x, y\rangle < \langle z, w\rangle \,.\!\equiv\!:\, x \subset z \,.\!\vee\!.\, x = 0 \,.\, w \subset y,$$

右にある「⊂」は，符号つきでない実数の「<」である．和，積，および巾の適当な意味は，おなじ精神で技巧を弄してつくりあげることができる．

他の方法，ペアノのそれ[1]は，符号つきの実数を符号つきでない実数の差の関係にとること，それゆえ，$+x$ を，$y=z\oplus x$ である場合の，y の z に対する関係に，そして，$-x$ を，$y=z\oplus x$ である場合の，z の y に対する関係にとることである．簡潔には，$+x=\lambda_z(z\oplus x)$ および $-x=\breve{}+x$．この意味での符号つきの実数 u と v に対しては，「<」および「＋」が，はっきり定義できるようになる：

$$u < v \,.\!\equiv (\exists z)(u`z < v`z), \qquad u+v = (u|v)\cup(v|u).$$

積と巾は，もっと，手がこんでいる．

どちらの表現法も，お望みだったかもしれないようには，正の実数を符号つきでない実数と同一視してはいない．有理数全体の自然数からの区別と，有理実数の有理数からの区別とを甘受しているように，それらの区別を人は甘受している．現に，われわれは，他の人びととは異なって，この有理実数の有理数からの区別を甘受しはしなかった：われわれは，有理実数を有理数とした．そして，われわれは正の実数に対しても同様にことを運ぶことができる．符号つきの実数の上述の表現法のどちらかを採用するかわりに，記法「$+x$」をなしにして，これまでそうよばれてきた実数を直接に補なうものとして，負の実数 $-x$ を導入することができる．ほんのしばらくのあいだ，実数を，それに対応する自然数 $y;z$ のクラスとしてではなく，§17 のように，再び自然数の実際の対 $\langle y, z\rangle$ のクラス

1　1901，48 ページ以下．彼は Maclaurin と Cauchy を引用している．

として考えれば，その方法はきわめて明瞭に見てとられよう．x がその意味での実数であり，それゆえ，自然数の関係であるとき，$-x$ を単に $\breve{x}$ にとることができる．かくして，実数 1 あるいは 1/1 は自然数のあいだの小の大に対する関係なので(§17 参照)，$-(1/1)$ は大の小に対する関係となる．われわれは，$x=0$ であるとき，かつそのときにかぎって，望み通りに，$x=-x$ をうる；$\breve{\Lambda}=\Lambda$．より一般的な効果は，2/3 に注意すれば，理解できる，これは $y/z<2/3$ なる自然数の対 $\langle y, z\rangle$ から成っていた；それを負とした $-(2/3)$ あるいは $\breve{}(2/3)$ は，$3/2<y/z$ なる対 $\langle y, z\rangle$ から成ることが理解できる．

対 $\langle y, z\rangle$ のクラスとしてよりは，むしろ，数 $y;z$ のクラスとしての実数に関するわれわれの実際の表現法に適合するように修正すれば，$-x$ のわれわれの定義は，もちろん，$\breve{x}$ ではなく，$\{y;z:\ z;y\in x\}$ になる．

このようにして，正の実数を通常の実数と，また，$-x$ を逆 $\breve{x}$ あるいは模造された逆 $\{y;z:\ z;y\in x\}$ と同一視すれば，これ以上洗練される余地はほとんどない．それに付随する「<」，「+」，等々，の適当な定義についてはより多くのことが残されているが，それは読者に任せて，おわりに虚数へ移ろう．

実数 1 に代る単位が i とよばれて，$\sqrt{-1}$ と見なされることを除けば，虚数は実数とおなじように列を形成する．虚数の採用は，実数の領域を**複素数**(*complex numbers*) $x+yi$ のそれへ拡張する；ここで，x および y は，負数を認めるところの，すでに拡張された意味での実数である．複素数が，$x+yi$ を $\langle x, y\rangle$ ととることによって，十分にモデル化されることは，久しい以前から陳腐なことであった．再び，算術的演算は再定義を要するが，それら演算のうちの二つに対する鍵は，これらである：

$$\langle x, y\rangle+\langle z, w\rangle=\langle x+z, y+w\rangle,$$
$$\langle x, y\rangle\cdot\langle z, w\rangle=\langle x\cdot z-y\cdot w,\ x\cdot w+y\cdot z\rangle.$$

これは，$\langle x, y\rangle$ を，頑固に，$x+yi$ に，また，$i\cdot i$ を -1 に考えれば理解される．

$x+yi$ を $\langle x, y\rangle$ とみなす表現法は，お望みだったかもしれぬように複素実数 $x+0\cdot i$ あるいは $\langle x, 0\rangle$ を実数 x と同一視してはいない．だが，われわれは，再び，希望通りの同一化を達成するような代りの定義を与えうる．自然数以外のものをすべての自然数に関係づける任意の対応 α を選びだしさえすればよい；そのとき，$x+yi$ を $x\cup\alpha``y$ として説明できる．希望通りに，これは，$y$ が 0 (すなわち，$\Lambda$) であるとき，$x$ に帰着する．希望通りに，実数 $x$ および $y$ もまた，おのおの $x\cup\alpha``y$ から一義的に再発見できる．なぜなら，実数が(負のときでさえ)，われわれの最後の表現法において，自然数のクラスであるかぎり，

$$x = \mathrm{N} \cap (x \cup \alpha``y), \qquad y = \breve{\alpha}``(x \cup \alpha``y)$$

だからである．

われわれが，ツェルメロ版の自然数を採用する以上，α に関する要求を満足する対応は $\lambda_z\{z, \{z\}\}$ である．したがって，

$$x+yi = x \cup \{\{z, \{z\}\} : z \in y\}$$

と書いてよいが，形式的な定義の詳細は，再び，読者に任せる．

VII. 順序と順序数

20. 超限帰納法

§13と§15において，いくつかの小さな変形を通して数学的帰納法のテーマを追求した．だが，いままで後まわしにしてきた，**走値帰納法**[1] (*course-of-values induction*) とよばれる，これの大きな変形もある．自然数に適用すると，走値帰納法の法則は，もしなにかが，任意の数までのすべての数について真であるときつねにその次の数についても真であるならば，それはすべての自然数について真である，ことをいっている．したがって，その〔定理〕型は，次のようになる：

20.1 $$(y)((x)(x < y \,.\supset Fx) \supset Fy) \,.\, z \in \mathrm{N} \,.\supset Fz.$$

証明．仮説により，

$$\begin{aligned} (x)(x < y \,.\supset Fx) &\supset. (x)(x < y \,.\supset Fx) \,.\, Fy \\ &\supset (x)(x < y \,.\supset Fx : x = y \,.\supset Fx) \\ &\supset (x)(x < y \,.\mathbf{v}.\, x = y :\supset Fx) \\ \text{(13.11 により)} \quad &\supset (x)(x \leqq y \,.\supset Fx) \\ \text{(13.12 により)} \quad &\supset (x)(x < \{y\} \,.\supset Fx). \end{aligned}$$

12.18により，空虚に，$(x)(x<\Lambda \,.\supset Fx)$．これら二つの結果と仮説「$z \in \mathrm{N}$」とから，13.9による帰納法によって，$(x)(x<z \,.\supset Fx)$ が結果する．それゆえ，長い仮説により，Fz．

走値帰納法を考察する他の方法は，**最初の例外の法則** (*law of first exception*)：$\sim Fy$ であるような最初の $y \in \mathrm{N}$ が存在するのでなければ，あらゆる $z \in \mathrm{N}$ に対して，Fz が真でなければならない，という法則としてである．この表現法は，20.1の単なる言いかえにすぎない．なぜなら，20.1の第1の長い仮説は，おのおのの y について，それが $\sim Fy$ なる最初のものではないということ，反対に，もし $\sim Fy$ ならば，ある $x<y$ に対して $\sim Fx$ でもあることをいっているにすぎないからである．

さきに注意したさまざまな帰納法は，それらが自然数に適用されるときには，「$\breve{\imath}$」のかわりの特定化されていない「α」についても成りたつ祖先関係の帰納法の特殊化であった(15.10, 15.13, 15.14 参照)．20.1に関しては，事情は異なる．20.1は，13.12を通して呼びだされた $\breve{\imath}$ の特殊な性質に依存していて，妥当なものとして関係一般に拡張されることは

1 Kleene, 22ページ．

できない．「$\breve{\imath}$」のかわりに「α」を有すると 20.1 がどうなるかを見よう．文節「$x<y$」は，(数に対しては)「$\langle x, y\rangle \in \breve{\imath}|{}^*\breve{\imath}$」および「$\langle x, y\rangle \in {}^*\breve{\imath} \cap {}^-I$」と等しくなるので，どちらの方法で，その部分を一般化するか，という問題がある．両方の方法を試みてみよう．

(i) $$(y)((x)(\langle x, y\rangle \in \alpha|{}^*\alpha \,.\supset Fx) \supset Fy)\,.\,\langle \Lambda, z\rangle \in {}^*\alpha \,.\supset Fz,$$

(ii) $$(y)((x)(\langle x, y\rangle \in {}^*\alpha \cap {}^-I \,.\supset Fx) \supset Fy)\,.\,\langle \Lambda, z\rangle \in {}^*\alpha \,.\supset Fz.$$

(i) および (ii) がどうして成立しえないか，を見るために，α を部分クラス関係 $\{\langle s, t\rangle: s\subseteq t\}$ にとろう．この解釈では，部分クラス関係の反射性と推移性によって，$\alpha={}^*\alpha=\alpha|{}^*\alpha$；さらに，「$\Lambda\subseteq z$」はおとしてもよい．したがって，(i) と (ii) は：

(iii) $$(y)((x)(x \subseteq y \,.\supset Fx) \supset Fy) \supset Fz,$$

(iv) $$(y)((x)(x \subset y \,.\supset Fx) \supset Fy) \supset Fz$$

になる．さて，

$$(y)((x)(x \subseteq y \,.\supset Fx) \supset: y \subseteq y \,.\supset Fy) \supset Fy)$$

なので，(iii) は完全に「Fz」に帰して，この「Fz」はどんなものでもよいことになろう．(iv) の信用を失墜させるのは，これほどつまらぬ事柄ではない；われわれは，さらに進んで，「F」を——たとえば，有限性：有限個のメンバーをもつということ，として——解釈しなければならない．あきらかに，もしあるクラスが無限ならば，あるメンバーをおとしてもそれは無限のままである；そこで，もしクラス y のあらゆる真部分クラスが有限ならば，y も有限である；すなわち，

$$(y)((x)(x \subset y \,.\supset Fx) \supset Fy).$$

それゆえ，(iv) は「Fz」に帰着するが，これは，z がいやしくもなんらかのクラスでありうる場合に，「z は有限である」ことを意味する．

われわれは，走値帰納法を，再び，最初の例外の法則と考えるならば，なぜ走値帰納法が祖先関係の一般理論に対して成りたたないかをもっともよく評価できる．そのとき，トラブルというのは，単に，例外，つまり $\sim Fz$ なる対象 z，のうちに ${}^*\alpha \cap {}^-I$ に関して最小のものがなにもないかもしれないということである；そのかわりに，例外のそれぞれにそれ以外の例外が ${}^*\alpha \cap {}^-I$ という関係をもっているような，無限の下降系列があるかもしれない．これが，有限性としての「F」に (iv) が成りたたない理由である：つまり，いか

なる無限クラスも「$\subset$」に関して最小ではなく，おのおのの無限クラスは，それが，こんどは，無限であるような真部分クラスをもつのである．

走値帰納法が「$<$」による自然数の順序づけにのみ適用されると期待する必要はないにしても，走値帰納法が一般に作用すると期待してもよいのは，「$<$」のように，関係づけられた任意の対象を含むクラスがつねに最小の対象を含むことを保証しているような関係に対してのみである，ということは，このようにして明らかとなる．

そのような関係は**基礎づけられている**(*founded*)といわれる．かくして，α は，もし，そのどんなメンバーに対しても，こんどは，そのクラスのあるメンバーが α という関係をもっている，というような(Λ 以外の)いかなるクラスも存在しないならば，基礎づけられているのである．より簡単には，もしそのあらゆるメンバーが $\breve{\alpha}$“x のうちにあるようなクラス $x \neq \Lambda$ がないならば，α は基礎づけられている；つまり，$x \subseteq \breve{\alpha}$“$x$ であるようないかなるクラス $x \neq \Lambda$ も存在しないならば，α は基礎づけられている．したがって，

20.2 「Fnd α」は「$(x)(x \subseteq \breve{\alpha}$“$x\,.\supset.\, x=\Lambda)$」を表わす．

自然数のあいだの大小関係，簡潔には，$\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$，は対象のあいだに線型順序を決定して，それは**順序づけ**(*ordering*)とよばれる．実数のあいだの大小関係

$$\{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathrm{Real}\,.\, x \subset y\}$$

も，同様に，順序づけである．真部分クラスのより一般的な関係 $\{\langle x, y\rangle : x \subset y\}$ は順序づけではない，なぜなら，$x \subset y$ でも，$y \subset x$ でも，また，$x = y$ でもないような x および y が存在するからである；**連結性**(*connexity*)は成立しないのである(§3)．

20.3 「$\alpha \prec \beta$」あるいは「$\beta \succ \alpha$」は「$\sim(\beta \preceq \alpha)$」を表わす

とする場合(11.1 参照)，クラスのあいだの大小関係 $\{\langle x, y\rangle : x \prec y\}$ に対しても同様である；なぜなら，$x \prec y$ でも，$y \prec x$ でも，また，$x = y$ でもないような x および y が存在するからである．さて，この際，注目に値する点は，基礎づけられているということが順序づけとなんの関係もない，ということである．順序づけ $\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ は基礎づけられている：Λ 以外の自然数のあらゆるクラスは，その関係に関して最小のメンバーを誇っている．他方，有理数または実数のあいだの大小関係は，順序づけではあるが，基礎づけられてはいない；たとえば，1/1 以上の有理数，あるいは 1/1 以上の実数のクラスはその関係に関しては最小のメンバーをもっていない．また，$\{\langle x, y\rangle : x \prec y\}$ は，順序づけではないが，基礎づけられている；あらゆるクラス $z \neq \Lambda$ は，$\{\langle x, y\rangle : x \prec y\}$ に関して，最小

のメンバー，すなわち，それより小さいどのクラスも z には属さないような z のメンバーをもっている．それらは，サイズはおなじであろうが，多数あるかもしれない．最後に，再び，順序づけでないところの $\{\langle x, y\rangle : x \subset y\}$ は，基礎づけられていない；たとえば，すべての無限クラスのクラスは，それが存在し，かつ，空でないと仮定すれば，$\{\langle x, y\rangle : x \subset y\}$ に関して最小のメンバーをもっていない．

基礎づけられた関係が順序づけであるときに，それは，**整列順序づけ** (*well-ordering*) とよばれる[2]．整列順序づけさえも，われわれの基本的な例 $\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ の構造から，たいへんそれていることがありうる．かくして，

$$0;0,\ 0;1,\ 0;2,\ \ldots,\ 1;0,\ 1;1,\ 1;2,\ \ldots,\ 2;0,\ 2;1,\ 2;2,\ \ldots,\ 3;0,\ \ldots,$$

のあいだの前後関係をとろう，これは，17.1 によれば，

(v) $$0,\ 1,\ 4,\ \ldots,\ 2,\ 5,\ 10,\ \ldots,\ 6,\ 11,\ 18,\ \ldots,\ 12,\ \ldots$$

を意味する．現にそうであるように，それが無限に多くの場所のそれぞれで無限の継続へと伸びてゆくから，この配置は，$\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ が与えるものとは構造上異なっている；にもかかわらず，それも整列順序づけである．

基礎づけられている関係について，無条件にいえるひとつの小さな事柄は，それが非反射的なことである．

20.4 $$\mathrm{Fnd}\,\alpha \supset . \langle x, x\rangle \notin \alpha.$$

証明．10.26 により，$\{x\} \neq \Lambda$．したがって，仮説と 20.2 により，$\sim(\{x\} \subseteq \breve{\alpha}``\{x\})$．すなわち，7.4 により，$x \notin \breve{\alpha}``\{x\}$．すなわち，$\langle x, x\rangle \notin \alpha$．

さて，基礎づけられた関係一般に対する走値帰納法の法則に向おう．大体のパターンは，20.1 でわれわれの前におかれている．そこの「$x<y$」を「$\langle x, y\rangle \in \alpha$」に変え，$\mathrm{Fnd}\,\alpha$ を仮定しさえすればよい．文節「$z \in \mathrm{N}$」は，まったく奇妙であるが，おきかえをせずにおとすことができる．だが．包括化前提が必要である．

20.5 $$\{x : \sim Fx\} \in \mho . \mathrm{Fnd}\,\alpha . (y)((x)(\langle x, y\rangle \in \alpha . \supset Fx) \supset Fy) . \supset Fz.$$

---

2 整列順序づけの概念は Cantor にさかのぼる．基礎づけられているということと順序づけとを分けて定義する点で，私は，用語を除けば，Whitehead and Russell (vol. 2, 529 ページ；vol. 3, 6 ページ) に従っている．基礎づけられた関係，順序づけ，および整列順序づけは，彼らの用語では，それぞれ，整列関係 (well-ordered relation)，系列 (series)，および整列系列 (well-ordered series) であった．順序づけと整列順序づけの形式的な定義は 21.2 と 21.4 にゆずる．

証明. 最後の長い仮説の対偶をとると,

$$(y)(\sim Fy \supset (\exists x)(\sim Fx \,.\, \langle x, y\rangle \in \alpha)) \\ \supset .\, y \in \breve{\alpha}``\{x: \sim Fx\}).$$

すなわち,

$$\{x: \sim Fx\} \subseteq \breve{\alpha}``\{x: \sim Fx\}.$$

しかるに, 仮説と 20.2 により, $w = \Lambda$ の場合にかぎり, $w \subseteq \breve{\alpha}``w$. 包括化前提によって w を $\{x: \sim Fx\}$ にとり, $\{x: \sim Fx\} = \Lambda$ を結論する. したがって, Fz.

「$z \in \mathrm{N}$」に類似したものが 20.5 にないのを見ると, なぜ「$z \in \mathrm{N}$」が 20.1 に必要なのか不思議に思われるかもしれない. 答えは, その数量的な特殊化 $\{\langle x, y\rangle: \Lambda \leqq x < y\}$ に反して, $\{\langle x, y\rangle: x < y\}$ 一般の方は, 基礎づけられているとは知られていない, ということである. それは非反射的でさえないかもしれないであろう; §13 参照.

z についての条件がなにもないという点で, 20.5 は驚くべきものである. それを説明すると, 最後の長い仮説は, おのずから, $\breve{\alpha}``\mho$ 外のすべての y に対して Fy を含意するので, ひじょうに強いからである. ときおり, 20.5 にはそのもっと混雑した系による用法がある.

20.6 $\{x: x \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\, \sim Fx\} \in \mho \,.\, \mathrm{Fnd}\, \alpha \,.$
$(y)((x)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\supset Fx) \,.\, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\!\supset Fy) \,.\, z \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\!\supset Fz.$

証明. 最初の仮説により,

$$\{x: \sim(x \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\!\supset Fx)\} \in \mho.$$

「$\langle x, y\rangle \in \alpha$」が「$x \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho$」を含意するので, 第3の長い仮説により,

$$(y)((x)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\supset\!: x \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\!\supset Fy) \supset\!: y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\!\supset Fy).$$

これらの結果と仮説「$\mathrm{Fnd}\,\alpha$」とから, 20.5 によって, $z \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\!\supset Fz$ が結果する.

祖先関係の帰納法が効く所で走値帰納法がつねに効くとはかぎらないことを, われわれは見た. その逆もまたいえる. かくして, (v)に描かれている数の順序づけをとり,「Fz」によって表わされているある条件を仮定しよう. $F0$ は分っているかもしれないし, また, x が数であり, y が順序(v)でのその次の数であるときはいつでも, $Fx \supset Fy$ であることも分っているかもしれない; しかし, そのようなあらゆる数 z に対して Fz と結論することはできない. 祖先関係の帰納法がそのような状況に対して不適当なのは, β がおのおの

の数の順序(v)における先行者に対する関係である場合，これらの数がみな0に対して $^*\beta$ をもつとはかぎらないからである；2さえももっていない．他方，α が，あらゆる数の順序(v)における，その順序におけるあらゆる後の数に対する関係であり，かつ

$$(y)((x)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\supset Fx) \supset Fy)$$

が分っているならば，20.5 あるいは 20.6 によって，(v)のあらゆる数 z に対して，(包括化前提を仮定して)ただちに，Fz を結論できる．(v)において2より前に無限に多くの数があることは，もはや，障碍にはならない．

かくして，一般的な形式 20.5 あるいは 20.6 における走値帰納法は，単に無限系列を通してだけではなく，それを超えて，それに先だって無限の介在物が存在するような継続へとわれわれを運んでゆく点で，通常の，あるいは，祖先関係の帰納法と対比されてよい．この理由で，20.5 あるいは 20.6 におけるような走値帰納法は**超限**帰納法(*transfinite* induction)とよばれる．

ここで問題になる超限的な特徴は，量の問題ではなく配列の問題である．(v)の数は，次のようにして再び整理できる：

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 16,\ \ldots$$

そして，事実，この順序は通常の祖先関係の帰納法に近づくことができる．γ が，各数のこの順序におけるその先行者に対する関係である場合，——二つ前の段落の $^*\beta$ とは違って——これらの数のおのおのは0に対して $^*\gamma$ をもつ．関係 $^*\gamma$ は，その段落の α とはおなじく，$^*\beta$ とは違って，(v)に現われる二つの数のそれぞれのあいだで前むき，または後むきに成立する．それでも，なお，$^*\gamma$ と α は決定的に異なる関係であり，祖先関係の帰納法は一方に適し，超限帰納法はもう一方に適している．

また，無限クラスのサイズの相違というようなものもあって，超限帰納法は，いかなる配列の下でも祖先関係の帰納法によってはおおいつくしえないような全体をおおうのに用いられる．だが，これらは，IX章とX章で扱われる事柄である．

この論題からさらに遠ざかる前に，基礎づけられた関係についての次の法則が，参照用に書きとめておかれねばならない．

20.7　$\alpha \subseteq \beta \,.\, \mathrm{Fnd}\,\beta \,.\supset \mathrm{Fnd}\,\alpha.$

証明．$\alpha \subseteq \beta$ なので，$\breve{\alpha}``x \subseteq \breve{\beta}``x$．それゆえ，$x \subseteq \breve{\alpha}``x \,.\supset.\, x \subseteq \breve{\beta}``x$．したがって，20.2 により，$\mathrm{Fnd}\,\beta \supset \mathrm{Fnd}\,\alpha$.

21. 順　　序

基礎づけられている関係は，上述の場所では，超限帰納法に対して注目されているが，また，整列順序づけとしても注目に値する．後者は，注意したように，基礎づけられている順序づけの関係である．整列順序づけは，この節の終りで説明されるように，同型対応(isomorphism)との関連における模範的な行動のために注目に値する．

順序づけの関係は，その全域のすべての対象を，おのおのが他のおのおのの前あるいは後にあるという線型順序(linear order)に並べる関係である．§20における主な例は，$\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ であった．一般に，α を順序づけの関係とするものは，それがその全域の二つの対象を，それぞれ，一方を他方に，しかし，その逆ではなく，関係づけ，そして，もしそれが x を y に，かつ y を z に関係づけるならば，むしろ x を z に関係づけて，その逆ではない，ということである．したがって，順序づけの関係は，**連結的**(*connected*)であり，

21.1　「$\mathrm{Connex}\,\alpha$」は「$(x)(y)(x, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho . \supset . \langle x, y\rangle \in \alpha \cup \breve{\alpha} \cup I)$」を表わす，

推移的(*transitive*) $(\alpha|\alpha \subseteq \alpha)$，かつ**非対称的**(*asymmetric*) $(\alpha \subseteq {}^{-}\breve{\alpha})$ である．また，それは非反射的 $(\alpha \subseteq {}^{-}I)$ であるが，それは非対称性から結果する．あるいは，非反射性を要請して，非対称性を導きだす方がよい，かくして：

21.2　「$\mathrm{Ordg}\,\alpha$」は「$\alpha|\alpha \subseteq \alpha \subseteq {}^{-}I . \mathrm{Connex}\,\alpha$」を表わす．

21.3　$\mathrm{Ordg}\,\alpha \supset . \alpha \subseteq {}^{-}\breve{\alpha}.$

証明．もし $\langle x, y\rangle \in \alpha \cap \breve{\alpha}$ なら，$\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle \in \alpha$，したがって，$\alpha|\alpha \subseteq \alpha$ であるから，$\langle x, x\rangle \in \alpha$；しかるに，これは「$\alpha \subseteq {}^{-}I$」に反する．

順序づけの関係にはかなりいろいろある．§20の(v)における前後関係は，それが構造上 $\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ と異なるのを見たにもかかわらず，順序づけの関係の資格をもっている．有理数あるいは実数における大小関係も，直接の後続者または先行者がないにもかかわらず，やはり順序づけの関係の資格をもつ．また，負数における大小関係も，行きどまりがないにもかかわらず，順序づけの関係の資格がある．もちろん，最後の二つの順序づけは基礎づけられていないし，それゆえ，整列順序づけではない；なぜなら

21.4　「$\mathrm{Wellord}\,\alpha$」は「$\mathrm{Fnd}\,\alpha . \mathrm{Ordg}\,\alpha$」を表わす

からである．

最後に，$\{\langle x,y\rangle : x\subset y\}$ および $\{\langle x,y\rangle : x\prec y\}$ は順序づけの関係ではまったくない，というのは，それらは連結性をもたないからである．だが，それらは，推移性と非反射性との条件「$\alpha|\alpha\subseteq\alpha\subseteq{}^{-}I$」を満足するから，**半順序づけ** (*partial ordering*) とよばれる．半順序づけは，また，非対称的である；21.3 の証明は連結性を使っていないからである．

これまでは，勝手に，順序づけの関係を，順序づけられるおのおのの対象のその後のおのおのの対象に対する関係と同一視してきた．そのかわりに，それを順序づけられたおのおのの対象の自分自身およびその後のおのおのの対象に対する関係と同一視できたでもあろう，というのは，どちらの関係も対象の順序を固定するのに十分であるからである．事実，一方の関係は，それぞれ，他方の関係によって表現できる；それは，ハンドルに対する最上の場所が問題になっているにすぎない．

第 2 の方法は，いくつかの利点をもっている．最初の，あるいは『強い』表現の下では，順序づけの全域は単一クラスではありえない；第 2 の，あるいは『弱い』表現の下では，そのような例外はなく，その結果，いくつかの定理と証明とがより簡単になる．もしも弱い表現を選んでいたとしたら，順序づけの関係のわれわれの主要例は，$\{\langle x,y\rangle : \Lambda\leqq x<y\}$ ではなくて，$\{\langle x,y\rangle : \Lambda\leqq x\leqq y\}$ であったであろう；そして，半順序づけの例は，$\{\langle x,y\rangle : x\subseteq y\}$ および $\{\langle x,y\rangle : x\preceq y\}$ であったであろう．21.2 においては，連結性および非反射性以外の諸性質が要求されていたであろう．推移性はそのままであったであろうが，非反射性のかわりには反対称性が存在したであろうし(§3 参照)，また，21.1 の意味での連結性のかわりに，「$\cup I$」なしで 21.1 によって定義される強い連結性が存在していたでもあろう．

おのおのその利点をもっているところのその他の方法もある．かくして，順序づけを，まったく関係と考えずに，クラスの入れ籠(nest)，つまり，順序づけられた対象のおのおのに対応し，かつ，それとその前にあるすべての対象とから成りたっているひとつのクラスと同一視してもよかった[1]．このような選択可能な方法のそれぞれは，21.2 のところに異なる定義を要求したであろう．

だが，私は最初の方法をとっている，なぜなら，それがより直観的であり，また，たとえば，超限帰納法を定式化する際に，それ自体のいくつかの形式上の利点をもっているからである．

1　このアイディアは Hessenberg(1906)に由来し，Kuratowski(1920)と Sierpiński(1921)によって，漸次，改良された．

さて，順序づけの関係について，二・三のことを証明しよう．

21.5 $\quad \mathrm{Ordg}\,\alpha \,.\, x, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\, \alpha``\{x\} = \alpha``\{y\} \,.\supset.\, x = y.$

証明．21.2 により，$\mathrm{Ordg}\,\alpha$ なので，$\alpha \subseteq {}^{-}I$．したがって，$x \notin \alpha``\{x\}$．それゆえ，最後の仮説により，$x \notin \alpha``\{y\}$．すなわち，$\langle x, y\rangle \notin \alpha$．同様に，$\langle y, x\rangle \notin \alpha$．しかるに，21.2 により，$\mathrm{Connex}\,\alpha$，したがって，第 2 の仮説により，$\langle x, y\rangle \in \alpha \cup \breve{\alpha} \cup I$．それゆえ，$\langle x, y\rangle \in I$．

もし $\mathrm{Ordg}\,\alpha$ かつ $\gamma \subseteq \alpha$ なら，$\mathrm{Ordg}\,\gamma$，ということは一般に真でない．連結性が γ に対して成立しないことがありうるであろう．たとえば，われわれの折紙つきの順序づけ $\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ から，ひとつの対 $\langle 5, 6\rangle$ でも落すならば，対の残りのクラスは順序づけではない．『順序集合』(ordered set) という普及した数学上の慣用句でもって順序について語るのに慣れている人が，一見したところこれと反対に，順序集合のどの部分集合も順序集合である，というのは正しいであろう；だが，この言明は，実際には，反対ではなく，むしろ，次の定理型において，正しく分析されている：

21.6 $\quad \mathrm{Ordg}\,\alpha \supset \mathrm{Ordg}\,\alpha \cap (\beta \times \beta).$

証明．仮説と定義により，

$$\alpha|\alpha \subseteq \alpha \subseteq {}^{-}I, \quad (1) \qquad\qquad \mathrm{Connex}\,\alpha. \quad (2)$$

$$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha \cap (\beta \times \beta)$$

なるときは，いつでも，$x, z \in \beta$ と，また，$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha$ とを有する，これから，(1) によって，$\langle x, z\rangle \in \alpha$，かくして，$\langle x, z\rangle \in \alpha \cap (\beta \times \beta)$．したがって，

$$\alpha \cap (\beta \times \beta) \text{ は推移的である．} \qquad (3)$$

さらに，(1) により，

$$\alpha \cap (\beta \times \beta) \subseteq {}^{-}I. \qquad (4)$$

$\alpha \cap (\beta \times \beta)$ の全域のどの x および y も，α の全域と β のうちにある．そこで，(2) によって，

$$\langle x, y\rangle \in \alpha \cup \breve{\alpha} \cup I, \qquad x, y \in \beta.$$

すなわち，$x = y$ であるか，あるいは，x が y に対して $\alpha \cap (\beta \times \beta)$ を有するか，または y が x に対して有するかである．したがって，

$$\mathrm{Connex}\,\alpha \cap (\beta \times \beta).$$

ゆえに，(3), (4)，および定義によって，$\mathrm{Ordg}\,\alpha \cap (\beta \times \beta)$．

順序づけ α の下で x が最初にくることを意味して，「$x1\alpha$」と書こう．

21.7 「$\beta 1\alpha$」は「$\beta \in \alpha``\mathfrak{V} \,.\, \beta \notin \breve{\alpha}``\mathfrak{V}$」を表わす．

順序は，たかだかひとつの最初をもつことを証明する．

21.8 $\mathrm{Ordg}\,\alpha \,.\, x1\alpha \,.\, y1\alpha \,.\supset .\, x = y.$

証明．仮説と 21.7 により，

$$x, y \notin \breve{\alpha}``\mathfrak{V}, \quad (1) \qquad\qquad x, y \in \alpha``\mathfrak{V}. \quad (2)$$

(1)により，$\alpha``\{x\}=\Lambda=\alpha``\{y\}$．これと(2)，および第1の仮説から，21.5 によって，$x=y$ となる．

最後に，整列順序づけについての法則をひとつ．

21.9 $\mathrm{Wellord}\,\alpha \supset \mathrm{Wellord}\,\alpha \cap (\beta \times \beta)$． **証明**は 21.4, 20.7, 21.6 による．

二つの有限な順序づけは，一方の順序づけの最初のものを他方の順序づけの最初のものに，次のものを次のものに，等々，というようにして，ついに一方の順序づけが尽きるまで対にしてゆくことによって，それらの長さが比較されうる；そのとき，もう一方がより長いのである．おなじような対応の方法が無限の順序づけにも，しばしば，適用されうる．長さがおなじであるとは，一般に，二つの順序づけのあいだに**同型対応** (*isomorphism*)，すなわち，一方の順序づけの全域と他方の順序づけの全域との順序を保存する対応が存在する，ということである．『順序を保存する』というのは，一方の順序づけにおいて任意のもの x が y に先だつのは，他方の順序において x に対応するものが y に対応するものに先だつとき，かつそのときにかぎる，ということである．

たとえば，奇数に適用された後続者関数は，奇数の標準的な順序づけと偶数のそれとのあいだの同型対応を構成する；なぜなら，x と y が $x<y$ なる奇数であるときはいつでも，そして，そのときにかぎって，われわれは，対応する偶数に対して，$\mathrm{S}`x<\mathrm{S}`y$ を有するからである．たとえ，双方の順序づけが無限であるとしても，この同型対応の存在は，奇数の順序づけと偶数の順序づけを等しい長さにするといってよい．

他方，ある順序づけ z が，有限にせよ無限にせよ，もうひとつの順序づけ w の初期切片 (initial segment) とのみ，この意味で長さが等しいときには，w は z より長いといわれる．

有限の場合には，長い方の順序づけは，もちろん，もっと多くのものを順序づける順序

づけにすぎない．しかし，無限の場合には，短い方の順序づけが，長い方の順序づけの順序づけるすべてのものを順序づけ，さらにより多くのものを順序づけるときでも，一方の順序づけが他方の順序づけより長いという判断に達することもありうる．そこで，自然数の標準的な順序づけ $\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ を，§20の(v)で描かれている順序づけ α と比較しよう．順序づけ α の下での最初のものは0に，次は1に，3番目は2に，等々，と対にできる．この一対化の原理は，順序づけ α における2まで決して達することなしに，$\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ によって順序づけられるあらゆるもの——あらゆる自然数——に及んでいる．したがって，α によって順序づけられるすべてのもの，および，さらに多くのものが $\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ によって順序づけられるにもかかわらず，順序づけ α は，その基準によれば，$\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}$ より長いのである．

このような手段によっては比較できない無限の順序づけもいくつかある．そこで，自然数の算術的順序づけと有理数の算術的順序づけとをとろう；すなわち，

$$\{\langle x, y\rangle : \Lambda \leqq x < y\}, \qquad \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathrm{Rat} \,.\, x \subset y\}.$$

それらを比較しようとするときは，最初の自然数と最初の有理数とを対にすることからはじめる；双方とも Λ である．だが，次の自然数，1，にはどのような有理数をわれわれは対にするだろうか？　次の有理数は存在しない，したがって，つぎつぎに対にするというプランは，自然数または有理数のどちらかを可能的にとり尽すまでもなく，くずれさってしまうのである．

だが，整列順序づけはつねに比較可能である．（肝腎な点でクラスが存在しないことも技術的にはありうる，ということを別にすれば，ともかく，つねに比較可能である．）このこと，つまり，私がすでにほのめかしていた整列順序づけの模範的な行動は，§27の**枚挙定理**(*enumeration theorem*)において現われるであろう．

22. 順 序 数

整列順序づけの一般的な比較可能性のゆえに，それらの尺度——**順序数**(*ordinal number*)とよばれる一種の数——を採用できる．有限の場合に限られることなく，これら長さの尺度は，自然数列の超限的な拡張を構成するであろう．有限の整列順序づけに対しては，それらは，単に自然数であろうし，あるいは，自然数であってもよかった；なぜなら，すでに注意したように，有限な順序づけの長さは順序づけられたものの量に似ているからである．だが，無限の整列順序づけの長さは，順序づけられたものが異ならないときでさえ

も異なりうることを，われわれは見た．その結果，超限順序数は自然数のクラスのサイズということを無限クラスに拡張したものとみなされることはできない．クラスのサイズ(IX 章で要約される)と整列順序づけの長さとは別なことである．

有限クラスを測定するという意図は，それらのクラスの順序が保証されているかぎり，自然数のどんな表現法によってもかなえられるのを見た(§11)．自然数の順序それ自体がクラスのサイズを測ることを可能にする，というのは，あるクラスが n 箇のメンバーをもつということは，$n>$ なる数のクラスとサイズがおなじこととして，つねに説明できるからである．いま，同様な注意が順序数にあてはまるのが分る：ともかく，順序数を適当に順序づけられているものと解釈しよう，すると，それらは整列順序づけの長さを測るのに用いられることができる．なぜなら，ある整列順序づけが長さ p であるということは，$p>$ なる順序数の列と長さがおなじである，ということとしてつねに説明されうるからである．

したがって，まず，有限順序数のある系列(progression) 0, 1, 2, … がほしいということになる．(私は，しばらく，これらの数字を，それらが§12で受けたツェルメロの解釈とは別のものとする．) 有限な順序数 p は，おのおの，$p>$ なる順序数の列の長さを測定する．それから，0, 1, 2, … という無限系列全体の長さを測る最初の超限順序数もほしいということになる．この順序数は，カントールに従って，ω とよばれる．こんどは，超限順序づけ $0, 1, 2, \ldots, \omega$ を測るために，ある種の後続者——それを $S`\omega$ とよぼう——をもたなければならない．つぎに，順序づけ $0, 1, 2, \ldots, \omega, S`\omega$ を測るものとして，$S`(S`\omega)$ がくる，等々．二重に無限である順序づけ $0, 1, 2, \ldots, \omega, S`\omega, S`(S`\omega), \ldots$ の全体の後に，そのすべてを測るためのある順序数がほしいということになる；それは，われわれがまもなく調べる「+」および「·」のカントールによる超限的な一般化によって，$\omega+\omega$，あるいは $\omega\cdot 2$ とよばれる．それから，$S`(\omega\cdot 2), S`(S`(\omega\cdot 2))$，等々，がきて，そして，これらすべてを超える $\omega\cdot 3$ がくる；それから，$S`(\omega\cdot 3)$，等々．$S`(\ldots(S`(\omega\cdot n))\ldots)$ という形のすべてのこのような数の順序づけを測るためには，さらにその上の数 $\omega^2$ がほしい；それから，$S`\omega^2, S`(S`\omega^2), \ldots, \omega^2\cdot 2, \ldots, \omega^2\cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}$，等々．これがどこまで進んで行くか——いいかえれば，それが ω の手前で止まったかどうか——は，来るべき定義と包括化公理の問題である．とにかく，それらが続くあいだは，おのおのの順序数は，それ以前のすべての順序数の列を測る．

順序数は，はっきりと二種類に分れる：**後続者**(*successors*)あるいは $S`x$ という形の順序数と，いわゆる**極限順序数**(*limit ordinals*)，すなわち，0, ω, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, ω^2, 等々で，これらは直接の先行者をもたない．後続者によって測られる順序づけは無限であってもよい

が，それでもなお，最後の箇所をもつであろう；極限順序数によって測られる順序づけは最後の箇所をもたない．

要求された順序を保証しているならば，どんな仕方で順序数を解釈してもよいので，順序数を適宜に解釈するのが最良の案である；そして，便利という点では，自然数を生成するフォン・ノイマンの方法の超限的な拡張に匹敵するものはない．フォン・ノイマンにとっては，おのおのの自然数はそれ以前のすべての自然数のクラスであった；そして，このアイディアの美しさは，それが有限を超える場合にもなお意味をもつことである．そこで，有限順序数をフォン・ノイマンの自然数としてとろう．自然数列を超えてある数 ω を希望するというだけで，ただちに，次の定義がでてくる：新しい数は，自然数そのものにならって，そのすべての先行者のクラスとして，かくして，単に，N (だが，いまでは，フォン・ノイマンの意味での N) として解釈できる．そのとき，次の数は，そのすべての先行者のクラス——かくして，$\omega\cup\{\omega\}$——として受けいれられるものとなる．これは，フォン・ノイマンに対する S の一般的な定義によって，S‘ω である (§12 参照)．同様にして，S‘(S‘ω), S (S‘(S‘ω)), 等々，をうる．同様に，0, 1, 2, …, ω, S‘ω, S‘(S‘ω), … のすべてのクラスとしての $\omega\cdot 2$ をうる．そして，残りのものに対しても同様である；それ以前のすべての順序数の列を測るのを意図しているおのおのの順序数は，いまや，単にそれ以前のすべての順序数のクラスにすぎない．

超限順序数をふくめて，順序数をこのように考えていく方法はフォン・ノイマン独特のものである[1]．それが目的にかなっていることは，もちろん，それが次の要求：いかなる整列順序づけも，ある順序数 p に対して $p>$ なる順序数の列と長さがおなじである，を充たしていることによるが，これは若干の証明を必要とする．この枚挙定理は，ある存在仮定にもとづいて § 27 で証明されるであろう．

自然数についてのフレーゲの表現法にむしろ似ている，フォン・ノイマンより以前の順序数の表現法があった．フレーゲの表現法によるおのおのの自然数がその数だけのメンバーをもつすべてのクラスのクラスであったのとおなじように，おのおのの順序数は，その長さのすべての整列順序づけのクラスであった．もっとはっきりいえば，その定義は二重になっている：まず，整列順序づけ x の順序数は，x と同型な (すなわち，それらと x とのあいだに同型対応が存在するような；§ 21 参照) すべての整列順序づけのクラスとして

1　1923．Bernays, 1941, 6 ページ，10 ページによれば，それは，Zermelo の 1915 年の未刊の著作においてすでに論じられていた．

定義され，ついで，順序数は，整列順序づけの順序数であるような任意のものとして定義される．これが，ホワイトヘッドとラッセルが採用し，カントールがヒントを与えていた方向であった．

それは，カントールが**順序型**(*order types*)とよんだ，より広いカテゴリーへ順序数を包摂するという長所をもっていた．相互に同型な順序づけはおなじ順序型をもつ，といわれる．したがって，x の順序型は x と同型なすべての順序づけのクラスとして定義されてよい．順序数は整列順序づけの順序型であった．

整列順序づけの逆は必ずしも整列順序づけではないが，順序づけの逆は順序づけである；そして，y が x の順序型である場合，$\breve{x}$ の順序型は y^*（カントールによれば $^*y$）とよばれるようになった．かくして，ω は，自然数のあいだの小の大に対する関係の順序数あるいは順序型であるから，ω^* は，負数のあいだの小の大に対する関係の順序型である．有理数のあいだの小の大に対する関係の順序型は，0 を除くか，あるいは，0 と負数をふくめるかのいずれかを条件とすれば，η とよばれる．実数に対応する順序型は λ とよばれる．これらの順序型 ω^*, η, および λ は順序数ではない．

即座に，それ以上の一般化ができる：x が順序づけであろうとなかろうと，x と同型なすべての関係のクラスを受けいれてよい．これが，ホワイトヘッドとラッセルの，x の**関係数**(*relation number*)の概念である．順序型は順序づけの関係数であり，順序数は，ホワイトヘッドとラッセルにとっては，整列順序づけの関係数である．順序数だけが大きさの自然な順序で配列される．

フォン・ノイマンの順序数は，ホワイトヘッドとラッセルのものよりも便利で洗練されているが，それは，おもに，フォン・ノイマンの「$<$」が単に「ϵ」によって，そして「$\leqq$」が「$\subseteq$」によって与えられる，という注目すべき事実によるのである．したがって，私は，順序数を整列順序づけの関係数としてよりはむしろフォン・ノイマンの意味にとるであろう．順序型，あるいは関係数は，一般に，もし必要であったならば，やはり上のようにして独立に定義されたでもあろう．私は，それらを必要としないはずである．

有限順序数を自然数と異なるものとしたところでなんの役にもたたないから，われわれが IV 章で自然数をフォン・ノイマンの方式にとって現在の発展段階に備えておかなかったことが悔まれもしよう．しかしながら，ツェルメロの方式の方を好んだのには理由があった：フォン・ノイマン方式で行なうにはどうしたらよいか，同じくらいはっきりとは私は理解していなかったのである．われわれの公理において必要とされる変更はただひとつ，

基礎になっている定義を調整すること：つまり，12.19 の，それゆえ 13.1 の基礎となっている 12.1 の ι のかわりにフォン・ノイマンの後続者関数をとるということによって，13.1 中に書きこまれてしまう目だたぬ変更のみである，ということを，ブラウンは実際に見出している．しかし，ι はより単純であるし，その差は証明に現われてくる．そこで，私は練習問題の種にもうひとつのやり方をとってみることを勧めはするが，この本では，自然数はツェルメロ流で，順序数はフォン・ノイマン流のままである．このプランは，ともかく，両方のアプローチに読者を親しませる点で引きあう．

ツェルメロからとられた意味での自然数と，われわれがいまフォン・ノイマンからとっているような意味での有限順序数とのあいだの相互関係は，容易に定式化される．

22.1　「$\acute{\mathrm{S}}$」は「$\lambda_x(x \cup \{x\})$」を表わし，

22.2　「C」は「$\lambda_x(\acute{\mathrm{S}}^{|x}`\Lambda)$」を表わす．

$\acute{\mathrm{S}}$ は順序数に対する後続者関数で，C は自然数に対する有限順序数の関係である．(C はまた Λ を非数に与える.) 任意の $x \in \mathrm{N}$ に対して，$\mathrm{C}`x$ はそれに対応する順序数である．

以下は，$\acute{\mathrm{S}}$ および C に関する五箇の基本的な点である．

22.3　$\acute{\mathrm{S}}`\Lambda = \{\Lambda\}.$

証明．$\Lambda \cup \{\Lambda\} = \{\Lambda\}$ であるから，$\Lambda \cup \{\Lambda\} \in \mathfrak{V}$ がえられる，それゆえ，10.24 により，$\acute{\mathrm{S}}`\Lambda = \Lambda \cup \{\Lambda\}$.

22.4　$\mathrm{C}`x = \acute{\mathrm{S}}^{|x}`\Lambda.$

22.5　$\arg \mathrm{C} = \mathfrak{V}.$

両式の**証明**は，$\acute{\mathrm{S}}^{|x}`\Lambda \in \mathfrak{V}$ であるから，10.24 と 10.23 による．

22.6　$\mathrm{C}`\Lambda = \Lambda.$　**証明**：22.4, 14.3.

22.7　$\mathrm{C}`\{\Lambda\} = \{\Lambda\}.$

証明．22.4 により，

$$\mathrm{C}`\{\Lambda\} = \acute{\mathrm{S}}^{|\{\Lambda\}}`\Lambda$$

(14.7 により)　$= \acute{\mathrm{S}}`\Lambda$

(22.3 により)　$= \{\Lambda\}.$

順序数は，それ以前のすべての順序数のクラスであるから，すべての有限順序数のクラ

スは，もしそれが存在するならば，最初の無限順序数であろう．そこで，われわれは，

22.8 「ω」は「$*\acute{\mathrm{S}}``\{\Lambda\}$」を表わす

と書いてよい．したがって，15.2 と 15.5 により，

22.9 $\Lambda \in \omega,$

22.10 $\acute{\mathrm{S}}``\omega \subseteq \omega.$

この最後の式は，有限順序数の後続者は，有限順序数がどれだけあるにせよ，有限順序数である，ことをいっている．次の定理は，さらに，有限順序数のおのおのは後続者を有することを保証している．

22.11 $x \in \omega .\supset. x \cup \{x\} \in \mho.$

証明 仮説と定義により，$\langle x, \Lambda\rangle \in \acute{\mathrm{S}}|^{y}$ なる y がある．そのとき，14.9 により，

$$y \in \mathrm{N}. \tag{1}$$

22.1 と 10.22 により，Func $\acute{\mathrm{S}}$．それゆえ，14.12 により，Func $\acute{\mathrm{S}}|^{y}$．したがって，

$$x = \acute{\mathrm{S}}|^{y}`\Lambda. \tag{2}$$

12.21 により，

$$\mathrm{C}``\{,,,\Lambda\} = \mathrm{C}``\{\Lambda\}$$

(22.5 により) $\quad = \{\mathrm{C}`\Lambda\}$

(22.6 により) $\quad = \Lambda \cup \{\Lambda\}$

(14.3 により) $\quad = \acute{\mathrm{S}}|^{\Lambda}`\Lambda \cup \{\acute{\mathrm{S}}|^{\Lambda}`\Lambda\}. \qquad (3)$

$$\mathrm{C}``\{,,,z\} = \acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda \cup \{\acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda\} \qquad [\mathrm{i}]$$

なる $z \in \mathrm{N}$ を仮定しよう．そのとき，13.1 と 22.5 により，$\acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda \cup \{\acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda\} \in \mho$．それゆえ，10.24 と 22.1 により，

$$\acute{\mathrm{S}}|^{z}\Lambda \cup \{\acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda\} = \acute{\mathrm{S}}`(\acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda). \qquad [\mathrm{ii}]$$

ケース 1：$z \neq \Lambda$．そのとき，$z \in \mathrm{N}$ なるゆえ，13.17 により，$\Lambda < z$．すなわち，定義により，$\{\Lambda\} \in \{,,,z\}$．そのとき，22.5 により，$\mathrm{C}`\{\Lambda\} \in \mathrm{C}``\{,,,z\}$．しかるに，22.7 により，$\mathrm{C}`\{\Lambda\} \neq \Lambda$．それゆえ，$\mathrm{C}``\{,,,z\} \neq \{\Lambda\}$．したがって，[i] により，$\acute{\mathrm{S}}|^{z}`\Lambda \neq \Lambda$．それゆえ，10.15 により，$\Lambda \in \arg \acute{\mathrm{S}}|^{z}$．

ケース 2：$z = \Lambda$．このときも，再び，14.3 と 10.4 により，$\Lambda \in \arg \acute{\mathrm{S}}|^{z}$．

二つのケースとも：$\Lambda \in \arg \acute{S}^{|z}$. したがって，10.18 と 14.6 により，

$$\acute{S}`(\acute{S}^{|z}`\Lambda) = \acute{S}^{|\{z\}}`\Lambda. \qquad [iii]$$

13.13 により，

$$\begin{aligned} C``\{,,,\{z\}\} &= C``\{,,,z\} \cup C``\{\{z\}\} \\ (22.5\text{ により}) \quad &= C``\{,,,z\} \cup \{C`\{z\}\} \\ (22.4\text{ により}) \quad &= C``\{,,,z\} \cup \{\acute{S}^{|\{z\}}`\Lambda\} \\ ([i]\text{—}[iii]\text{ により}) \quad &= \acute{S}^{|\{z\}}`\Lambda \cup \{\acute{S}^{|\{z\}}`\Lambda\}. \end{aligned}$$

これは「$z \in N$」と [i] から結果するから，(1) と (3) から 13.10 に従う数学的帰納法により，

$$C``\{,,,y\} = \acute{S}^{|y}`\Lambda \cup \{\acute{S}^{|y}`\Lambda\}$$

をうる．したがって，(2) により，$C``\{,,,y\} = x \cup \{x\}$．それゆえ，22.5 と 13.1 により，$x \cup \{x\} \in \mathfrak{V}$.

われわれは，いまや，22.10 を存在に関して強めることができる．

22.12 $\qquad x \in \omega \,.\supset.\, x \cup \{x\} \in \omega.$

証明． 仮説と 22.11 により，

$$x \cup \{x\} \in \mathfrak{V}. \qquad (1)$$

それゆえ，定義により，$\langle x \cup \{x\}, x \rangle \in \acute{S}$．したがって，仮説と (1) により，$x \cup \{x\} \in \acute{S}``\omega$．それゆえ，22.10 により，$x \cup \{x\} \in \omega$.

われわれの次の仕事は，有限および無限の順序数について採用された概念を，形式的な定義のうちに取りこむことである．はっきりした特徴というのは何か？　ひとつには，おのおのの順序数 x はそれ以前の順序数のクラスである．これらのおのおのは，こんどは，それ以前の順序数のクラスなので，x のメンバーのすべてのメンバーは x のメンバーでなければならない，のが分る；すなわち，$\bigcup x \subseteq x$．もうひとつとしては，x のメンバーはメンバー性の関係によって順序づけられている；というのは，それらは順序数であり，より小さい順序数のおのおのは，より大きい順序数のおのおののメンバーである．第3の，さほどあきらかでない特徴は，x がメンバー性に関して際限のない下降をかくまっていない，ということである．その理由というのは，本質的に，ある極限順序数とその次の極限順序数とのあいだには無限に多くの順序数があるが，ある極限順序数と，その次の極限順序数の手前の任意の順序数とのあいだには有限に多くの順序数しかない，ということであ

る. 上の方に向って数えていけば，いつでも，次の順序数があり，かくして，メンバー性に関して際限のない上昇がある. 下の方に向って数えていけば，ひとつの極限順序数の下へさがる度ごとにかならず無限に多くの順序数を通過して下りてゆき，そして，どんなにつむじ曲りにやっても，有限に多くのステップでわれわれは底にたどりつく.

鮮明な定式化には，メンバー性の関係を表わす記号「$\mathfrak{E}$」が役だつであろう.

22.13 「$\mathfrak{E}$」は「$\{\langle y, z\rangle : y \in z\}$」を表わす.

とくに，$\mathfrak{E}\restriction\beta$ は，$\cup\beta\subseteq\beta$ なる場合，その全域全体が β に限定された $\mathfrak{E}$ である.

22.14 $\cup\beta \subseteq \beta \,.\supset.\, \mathfrak{E}\restriction\beta = \mathfrak{E}\cap(\beta\times\beta)$.

証明. 仮説により，$x \in y \in \beta \,.\supset.\, x \in \beta$. すなわち，

$$x \in y \in \beta \,.\equiv.\, x \in y \,.\, x, y \in \beta.$$

したがって，定義により，$\mathfrak{E}\restriction\beta=\mathfrak{E}\cap(\beta\times\beta)$.

さて，順序数 x の三つの特徴にもどろう. 第1は，$\cup x\subseteq x$ であった. 第2は，x のメンバーが $\mathfrak{E}$ によって順序づけられること，すなわち，Ordg $\mathfrak{E}\cap(x\times x)$，あるいは，22.14 によって，Ordg $\mathfrak{E}\restriction x$ であった. 第3は，Fnd $\mathfrak{E}\restriction x$ であった. 結合すれば，

22.15 「NO」は「$\{x : \cup x \subseteq x \,.\, \text{Wellord}\, \mathfrak{E}\restriction x\}$」を表わす[2].

算術的演算が，数ページ前では，解説風に順序数に適用された. いま，この拡張を調べてみよう. 順序数の和 $x+y$ は，長さ x の**切片**(*segment*)(初期切片を意味する; それが通常の用法である)と長さ y の剰余とをもつ整列順序づけ z の長さを測るのにあてられて

---

2 von Neumann の定式はもっと遠回しであった. Bernays, 1941, 6ページ, 10ページに報告されているように，Zermelo の未刊の 1915 年の定式は(Bernays の第1の文節はその第3の文節によってあきらかに含意されるので，もし Bernays の第1の文節を落すならば)次のものとおなじことになる: NO は

$$\{x : (y)(y \in x \,.\supset.\, y \cup \{y\} \in x \cup \{x\} : y \subseteq x \,.\supset.\, \bigcup y \in x \cup \{x\})\}$$

である. 22.15 の定式は，明白な単純化によって，Gödel(1940, 22ページの下部)からでてくる. また，Suppes, 131ページを見よ. 22.15 に類似したもっとも初期の定式は，Robinson, 1937, によって与えられた; その違いは，彼が**基底づけ**(*Fundierung*)(下の§39を見よ)の公理に依拠して，「Wellord」のかわりに「Connex」を用いて処理したということだけであった. 実際には，私はそうはしていないが，もしわれわれがその公理を受けいれるならば，NO は $\{x : (y)(y \in x \,.\supset.\, \bigcup y \subseteq y \subseteq x)\}$ として定式化できる. これは，Bernays が 1937 年の Gödel の講義に帰している定式化から，初等的な変形によってえられる. 事実，Brown が示したが，$\{x : (y)(x \in y \,.\supset (\exists z)(z \in y \,.\, \bigcup z \subseteq z \subseteq \bar{y}))\}$ は，*Fundierung* なしで，間にあう. Quine and Wang をも参照，そこでは，関連する表現法が 69ページの(ii)で見た反転のからくりと結びつけられている.

いる．たとえば，(順序数 2 に対する) $\omega+2$ は：

$$0, 1, 2, \ldots, a, b$$

の長さである．超限的な場合には，交換則は加法には成りたたない；かくして，$2+\omega$ は，$\omega+2$ とは違って，単に：

$$a, b, 0, 1, 2, \ldots$$

の長さであり，これは，あきらかに：

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

と同型であり，したがって，長さは ω である．

順序数の積 $x \cdot y$ は，その順序づけられたもののひとつひとつの順序数それぞれのかわりに長さ x の列全体を挿入することによって，長さ y の整列順序づけからえられる整列順序づけの長さを測定することを意図している．たとえば，$\omega \cdot 2$ は，

$$0, 1, 2, \ldots, a, b, c, \ldots$$

の長さであり，一方，$2 \cdot \omega$ は，

$$0, a, 1, b, 2, c, \ldots$$

の長さである．かくして，また，交換則は成りたたない；$\omega=2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2=\omega+\omega$.

これらの和と積の概念は，順序数に対するのと同様に，順序型一般にも役だつ．かくして，$\omega^*+\omega$ は，負の数をふくめて，整数のあいだの大小関係の順序型である．しかしながら，私はこの余分の適用範囲を無視し，和と積の概念によりいっそう力を注ぐ場合には，便宜上，この余分の範囲には適用せずにおく．

順序数に関する算術的演算は，実際上はともかくとして理論的には，§16 の自然数に対して定義された演算から記法上区別されるべきである．実際，もう一方では，いったん順序数に対する演算が厳密に定義されると，それらの定義が古い定義にとって代るように作られることもできたであろう；自然数論における演算の定義の内容は，当の順序数が有限であるような特殊ケースを支配する定理のうちに再発見できたでもあろう．だが，このような示唆は，この本のプランに伴なう複雑化：つまり，§§12—16 当時の自然数は 22.15 現在の有限順序数ではないという事実を無視している．ともかく，自然数の理論を，この超限的な順序数の拡張と，§30 に用意されている，これとは異なるカーディナルにおける超限的な拡張とのあいだでも中立のままにしておくのがたぶんよいであろう．

われわれは，順序数の和の形式的な定義にむかって進んでいるので，切片の形式的な定

義からはじめるものと期待されているかもしれない．切片 $\mathrm{seg}_w z$ は，順序づけられた対象のあるひとつ，w，のちょうど前で順序づけ z から切り離されているので，あきらかに，順序づけ

$$\{\langle u, v\rangle : \langle u, v\rangle, \langle v, w\rangle \in z\}$$

である．より一般的には，ある順序づけについて，それが z であるか，またはある w に対して $\mathrm{seg}_w z$ であるかのどちらかであるとき，z の切片として語ってよい．順序数の和の，上でのべた簡単な性格づけにも用いられている剰余という観念についても，その定義はまた自明である：s が z の切片であり，そして，t が s の全域である場合，z の剰余は $z \cap (\bar{t} \times \mathfrak{V})$ である．最後に，$x+y$ は，z が長さ x の切片と長さ y の剰余とをもつ場合の z の長さである．

だが，この形式化でもって押し進めるよりは，むしろ，その形式化がフォン・ノイマンの順序数の特殊な性質を利用することによってより簡単にされる，ということに注意する方がよい．x のメンバーは，順序にとると，それら自身，長さ x の順序づけである；そして，$x+y$ のメンバーの残りは，順序にとると，長さ y の順序づけである．したがって，$x+y$ を，単に，$v \cap \bar{x}$ の順序づけが長さ y であるような順序数 v として記述できる．もちろん，$v \cap \bar{x}$ の『その順序づけ』(*the* ordering) は，メンバーとして $v \cap \bar{x}$ に属している順序数のあいだの大小関係である．順序数のあいだの大小関係は $\mathfrak{E}$ なので，$v \cap \bar{x}$ のその順序づけは $\mathfrak{E} \cap (\bar{x} \times v)$ である．したがって，われわれの順序数の和 $x+y$ は，いまや，$\mathfrak{E} \cap (\bar{x} \times v)$ が長さ y であるような，すなわち，$\mathfrak{E} \restriction y$ と同型な順序数 v として記述できる．この，同型という語句を形式化する方法は，§21 でいわれた事柄から素早くみてとられるか，あるいは，§27 中の面倒な実地練習のうちにみてとられよう．(ついでにいうと，順序づけの全域が単一クラスではありえないという事実は，$x+1$ に対する定義の調整を必要とする；§21 参照．また，$x+0$ がただひとつにきまるようにも準備されなければならない．)

だが，超限回帰法(§25)を使う他のアプローチには利点があるので，順序数の和の最終的な定義を与えずに止めておく．順序数の積は，私が上に与えた $x \cdot y$ のスケッチ風の説明を形式化する試みによるよりも，超限回帰法による方がより容易に定義される；順序数の巾は，ここでは素描もしなかったが，同様に超限回帰法によって最善の定義が与えられる；したがって，三つの演算すべてをその方法で定義することにより，統一性と体系的連関とがえられるのである．そのときには，また，これらの演算と，反復(§16)あるいは回

帰的定義，によって定義された自然数に対するその対応物とのあいだの類似性が見てとられるようになる．

23. 順序数の法則

NO の定義 22.15 を導いた推理においては，そのように定義された NO が，意図された意味でのすべての順序数——すなわち，Λ と，単一の新しい順序数として，(跳躍をはばんでいる) Λ から始まる順序数の集積のおのおの，とを網羅しているということはさほど明らかではなかった．これをこれから確立したい．ひとつの点，$\Lambda \in \text{NO}$，は下の 23.1 で証明される．他の点は若干の定式化を必要とする．順序数のクラス x がなにも飛びこしていないということは，x のあるメンバーより小さいあらゆる順序数が x の中にある，ということである；すなわち，順序数に対する「<」は「$\in$」なので，x のあるメンバーのあらゆるメンバーが x の中にある，ということ；つまり，$\bigcup x \subseteq x$ ということである．したがって，必要とされる保証は，$\bigcup x \subseteq x \subseteq \text{NO} .\supset. x \in \text{NO}$ ということである．それは，24.5 で証明されるであろう．

逆に，22.15 におけるような NO が意図されたものとしての順序数以外のなにものをも含まないということに対して，われわれはどんな保証をもっているであろうか？ 24.3 において，NO がメンバー性によって整列されることを見るであろう．かくして，もし好ましくないメンバーがひとつでもあるならば，この順序づけに関して最初のメンバーがなければならない．(ただし，整列順序づけからのそのような推理には包括化前提を必要とする．) だが，そのときには，NO のその最初の好ましくないメンバー x は意図された順序数だけから成るクラスである．加えて，x は，初めから引きつづき，それら意図された順序数のどれをも飛びこすことはない；これが保証されているのは，再び，意図されたすべての順序数が NO の中にあるという事実とともに，NO がメンバー性によって整列されている，という事実によっている．だが，そのとき，NO 自身は意図された順序数の条件を満足している．

われわれはこのようにして，22.15 がわれわれの直観的な意図にあっている，ということを示しはしたが，直観的理解以外になにかがそれによってきまってくるわけではない．順序数のどの表現法においてもなくて困るのは，枚挙定理なのであって，これは，順序数が整列順序づけを測るのに役だつことを示す；そして，枚挙定理は，やがて，22.15 に対して，§27 で現われることになる．

フォン・ノイマンの順序数についての初等的な法則を追求しよう.

23.1 $\Lambda, \{\Lambda\} \in \mathrm{NO}.$

証明. 定義により，Wellord Λ. しかるに，$\mathfrak{E}\upharpoonright\Lambda=\mathfrak{E}\upharpoonright\{\Lambda\}=\Lambda$. さらに，$\bigcup\Lambda=\Lambda$ および $\bigcup\{\Lambda\}=\Lambda\subseteq\{\Lambda\}$. したがって，22.15 により，$\Lambda, \{\Lambda\} \in \mathrm{NO}$.

23.2 $\Lambda \neq x \in \mathrm{NO} .\supset. \Lambda \in x.$

証明. 仮説と定義により，Fnd $\mathfrak{E}\upharpoonright x$. したがって，

$$x \subseteq \breve{}(\mathfrak{E}\upharpoonright x)``x .\supset. x = \Lambda.$$

それゆえ，仮説により，$x\not\subseteq\breve{}(\mathfrak{E}\upharpoonright x)``x$, すなわち，$\breve{}(\mathfrak{E}\upharpoonright x)``x$ の中にないあるもの $z\in x$ が存在する．すると，

$$(w)(w \in x .\supset. \langle w, z\rangle \notin \mathfrak{E}\upharpoonright x)$$

($z\in x$ なので) $$\supset. w \notin z). \tag{1}$$

仮説と定義により，$\bigcup x\subseteq x$. したがって，$z\in x$ なので，8.5 により，$z\subseteq x$. それゆえ，(1) により，$z=\Lambda$. したがって，$\Lambda\in x$.

順序数 x の後続者は $x\cup\{x\}$ なので，その先行者は，もしあるとすれば，$\bigcup x$ である．なぜなら，

23.3 $x \in \mathrm{NO} .\supset. x = \bigcup(x\cup\{x\}).$

証明. 8.2 によって，$\bigcup\{x\}=x$. したがって，8.3 により，$\bigcup(x\cup\{x\})=\bigcup x\cup x$. しかるに，仮説と 22.15 により $\bigcup x\subseteq x$ なので，$\bigcup x\cup x=x$.

順序数を順序づけるべきものは $\mathfrak{E}$ なので，次の二つの定理が期待されていたはずであった．

23.4 $x \in \mathrm{NO} .\supset. x \notin x.$

証明. 仮説と定義により，$\mathfrak{E}\upharpoonright x\subseteq {}^{-}I$. したがって，定義により，$x\notin x$.

23.5 $x \in \mathrm{NO} .\supset \sim(x \in^2 x).$

証明. 仮説と定義により，$\bigcup x\subseteq x$. したがって，23.4 により，$x\notin\bigcup x$.

次の定理は，ある順序数が他の順序数より小さいことを表わす二つの方法:「∈」と「⊂」，とを同等にする，ということにとりかかっている．

23.6 $x \in y \in \mathrm{NO} . \supset . x \subset y.$

証明. $y \in \mathrm{NO}$ なので，22.15により，$\bigcup y \subseteq y$. そこで，$x \in y$ なので，8.5により，$x \subseteq y$. しかるに，仮説と23.4により，$x \neq y$.

順序数のおのおのに成りたつ法則は，順次，すべての順序数のクラスNOにも成りたつことが分る．そこで，23.2をとろう，これは空でない順序数 x のおのおのに対して $\Lambda \in x$ なることをのべている；23.1で見たように，また，$\Lambda \in \mathrm{NO}$ をもわれわれは有している．次の三つの定理は，おなじように，23.4, 23.6および22.15の「$\bigcup x \subseteq x$」に対応している．

23.7 $\mathrm{NO} \notin \mathrm{NO}.$

証明. もし $\mathrm{NO} \in \mathrm{NO}$ なら，$\mathrm{NO} \in \mathfrak{V}$ であり，23.4の x をNOにとることができ，$\mathrm{NO} \notin \mathrm{NO}$ という結論になる．

23.8 $x \in \mathrm{NO} . \supset . x \subset \mathrm{NO}.$

証明. 仮説と定義により，

$$\mathrm{Wellord}\ \mathfrak{E} \restriction x. \tag{1}$$

したがって，定義により，

$$\mathfrak{E} \restriction x | \mathfrak{E} \restriction x \subseteq \mathfrak{E}. \tag{2}$$

任意の $w \in x$ を考えよう．仮説と23.6により，

$$w \subset x. \qquad \text{[i]}$$

つぎに，任意の $y \in \bigcup w$ を考えよう．すると，$y \in z \in w$ なるあるもの z がある．$z \in w$ なので，[i]により，$z \in x$ がえられる．これらの結果を集めると，$y \in z \in w$ と $z, w \in x$ がえられる；すなわち，

$$\langle y, z \rangle, \langle z, w \rangle \in \mathfrak{E} \restriction x.$$

したがって，(2)により，$y \in w$. しかるに，y は $\bigcup w$ の任意のメンバーであった．それゆえ

$$\bigcup w \subseteq w. \qquad \text{[ii]}$$

(1)と21.9により，

$$\mathrm{Wellord}\ \mathfrak{E} \restriction x \cap (w \times w),$$

すなわち，[i]と9.16により，$\mathrm{Wellord}\ \mathfrak{E} \cap (w \times w)$，すなわち22.14と[ii]により，

Wellord $\mathfrak{E}\upharpoonright w$. したがって，[ii] と 22.15 により，$w \in \mathrm{NO}$. しかるに，w は x の任意のメンバーであった．それゆえ，$x \subseteq \mathrm{NO}$. しかるに，仮説と 23.7 により，$x \neq \mathrm{NO}$. したがって，$x \subset \mathrm{NO}$.

23.9 $\cup \mathrm{NO} \subseteq \mathrm{NO}$. **証明**は 23.8, 8.5 による．

$z \in \mathrm{NO}$ なるときには，定義から，$\mathfrak{E}\upharpoonright z$，あるいは $\mathfrak{E} \cap (z \times z)$，が連結的であることが分っている．これは，$\mathfrak{E}$ が z の二つのメンバーを，それぞれ，連結するということとまったく同等ではない．だが，これも証明できる．

23.10 $x, y \in z \in \mathrm{NO} .\supset: x \in y .\mathbf{v}. y \in x .\mathbf{v}. x = y.$

証明．仮説と定義により，

$$\cup z \subseteq z, \quad (1) \qquad \text{Connex } \mathfrak{E}\upharpoonright z. \quad (2)$$

仮説により，$x, y \in z$；したがって，9.16 により，

$$(u)(v)(u \in x \,.\, v \in y .\supset. \langle u, x\rangle, \langle v, y\rangle \in \mathfrak{E}\upharpoonright z)$$

((2) により) $\supset: x \in y .\mathbf{v}. y \in x .\mathbf{v}. x = y)$.

すなわち，

$$x \neq \Lambda \neq y .\supset: x \in y .\mathbf{v}. y \in x .\mathbf{v}. x = y. \qquad (3)$$

仮説と 23.8 により，$x \in z \subset \mathrm{NO}$. したがって，$x \in \mathrm{NO}$. それゆえ，23.2 により，$\Lambda \neq x .\supset. \Lambda \in x$. したがって，$x \neq \Lambda = y .\supset. y \in x$. 同様にして，$x = \Lambda \neq y .\supset. x \in y$. 最後に，$x = \Lambda = y .\supset. x = y$. これら三つの結論が (3) と結合すると，あらゆる場合に，

$$x \in y .\mathbf{v}. y \in x .\mathbf{v}. x = y$$

なることを示す．

もし α がメンバーをもち，それらメンバーがすべて順序数であるならば，それらの共通部分 $\cap \alpha$ はそれらのうちで最小である．$\cap \alpha \in \alpha$ ということは 23.25 で始めて証明されるであろうが，α のうちにはそれより小さい順序数がないことは，われわれは，いま，証明できる．「$\in$」は「より小」を表わすから，その要点は次のように表現されうる：

23.11 $\alpha \subseteq \mathrm{NO} .\supset. \alpha \cap \cap \alpha = \Lambda.$

証明．もし $x \in \alpha$ ならば，仮説により，$x \in \mathrm{NO}$，それゆえ，23.4 により，$x \notin x \in \alpha$，したがって，ある y に対して，$x \notin y \in \alpha$；すなわち，8.9 により，$x \notin \cap \alpha$.

順序数に関するこれ以上の法則は，次第に，われわれの貧弱な仮定 7.10 および 13.1 の及

ぶ範囲にはない存在規定に依存する度を高めるであろう．ひとつの公理型が加えられてわれわれをはるかに運びさってくれるであろうが，それは順序数に対する13.1に類似のものである．13.1は，すべての $x \in \mathrm{N}$ に対して，もし Func α ならば，$x \geqq$ なる独立変項に対する α のすべての値のクラスが存在する，ということをのべていた．(13.1は $x \notin \mathrm{N}$ なる場合をも算入していたが，それは事のついでであった.) いま，われわれの新しい公理型は，適当な調整を加えたうえで，すべての $x \in \mathrm{NO}$ についておなじことをのべるであろう．それは，すべての $x \in \mathrm{NO}$ に対して，もし Func α ならば，x より小なる独立変項に対する α のすべての値のクラスが存在することをのべるであろう．ところが，「より小」は，いま，「$\in$」を意味する．そこで，

23.12 **公理型** $\mathrm{Func}\,\alpha\,.\,x \in \mathrm{NO}\,.\supset.\,\alpha``x \in \mathfrak{V}.$

13.1同様，またはるかに直接的に，これは置換原理を例証している．13.1は任意の有限のサイズまでのすべてのクラスをわれわれに保証した．23.12は任意の順序数のサイズまでのすべてのクラスをわれわれに保証している．

13.1は条件づきとしてさえも，無限クラスについてなにもわれわれに語りはしない，ということが指摘された．23.12は異なる．それは，無限クラスが存在する，ということをやはり含意してはいない；しかしながら，もしいくつかの無限クラスがわれわれに与えられるならば，23.12は，それに伴なうにちがいない他の無限クラスについて，われわれに語っている．

Nのメンバーは有限順序数と相互に関係づけられうるから，われわれは，23.12が13.1にとって代り，それを含意すると期待してもよかろう．しかし，現実には，13.1を23.12から導きだすいかなる明確な方法も存在しない．その障害は，単に，13.1が $x \notin \mathrm{N}$ なる無駄なケースを含んでいる，ということではない；われわれは喜んでこれらの無駄なケースを放棄してもよかった．その障害は，また，NOにおいてはフォン・ノイマンの数を用いているのに反して，Nではツェルメロの数を用いているということでもない．もし§12を改めてNをフォン・ノイマン方式に変えたとしても，このように解釈しなおした13.1さえも23.12からいかに演繹するかは明らかでない．というのは，Nの定義は，「S」をフォン・ノイマンの意味にとったうえで，おそらく，§11におけると同様に展開されるであろう；そして，困難は，そのとき，$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{NO}$ を証明する際に生ずるであろう．帰納法が自然な手段であろうが，それは13.1に依存している．

最終的な強い体系では，われわれは13.1と23.12を結びつけて，ある単一のより広い置

換公理としようと考えたでもあろう．しかし，現在の段階では，弱さを尊ぶ．この特徴を尊重して，この章のほぼ終り (24.10) まで，23.12 からえられるはずの結果は，次の三つの系のうちの第 2 の系，**分出** (*Aussonderung*) 原理の一例に依存しているにすぎないであろうということに，われわれは注意してよい．

23.13 $\mathrm{Func}\,\alpha\,.\,x \in \mathrm{NO}\,.\,\beta \subseteq \alpha``x\,.\supset.\,\beta \in \mathfrak{V}$,

23.14 $x \in \mathrm{NO}\,.\supset.\,x \cap \alpha \in \mathfrak{V}$,

23.15 $\mathrm{Func}\,\alpha\,.\,\breve{\alpha}``\mathfrak{V} \subseteq x \in \mathrm{NO}\,.\supset.\,\alpha \in \mathfrak{V}$.

23.13 の**証明**は，13.2 の証明と同様．

23.14 の**証明**は，$\mathrm{Func}\,I$ かつ $x \cap \alpha \subseteq I``x$ であるから，23.13 による．

23.15 の**証明**．$\beta = \{\langle\langle y, z\rangle, z\rangle : \langle y, z\rangle \in \alpha\}$ とせよ．$\mathrm{Func}\,\alpha$ であるから，$\mathrm{Func}\,\beta$．そのとき，$x \in \mathrm{NO}$ なので，23.12 により，$\beta``x \in \mathfrak{V}$．すなわち，$\alpha \restriction x \in \mathfrak{V}$．すなわち，$\breve{\alpha}``\mathfrak{V} \subseteq x$ なので，$\alpha \in \mathfrak{V}$．

13.3 が自然数上の数学的帰納法の法則 13.5 を支えていたのとちょうど同様に，23.14 は順序数上の次の超限帰納法の法則を支えている．

23.16 $(y)((x)(x \in y\,.\supset Fx)\,.\,y \in \mathrm{NO}\,.\supset Fy)\,.\,z \in \mathrm{NO}\,.\supset Fz$.

証明[1]．$z \in \mathrm{NO}$ なので，23.14 により，$z \cap \{x : \sim Fx\} \in \mathfrak{V}$．すなわち，

$$\{x : \sim(x \in z\,.\supset Fx)\} \in \mathfrak{V}. \tag{1}$$

23.8 により，われわれは，すべての $y \in z$ に対して $y \in \mathrm{NO}$ なることを有している．それゆえ，長い仮説は次式を与える：

$$(y)((x)(x \in y\,.\supset Fx) \supset: y \in z\,.\supset Fy).$$

われわれは再び余計な「$y \in z$」を結びつけてもよい，かくて次式をうる：

$$(y)((x)(x \in y \in z\,.\supset Fx) \supset: y \in z\,.\supset Fy).$$

$z \in \mathrm{NO}$ であるから，23.6 により，$x \in y \in z$ なるときはいつでも $x \in z$ なることがえられる．そこで，余計な「$x \in z$」を次のように挿入してもよい：

$$(y)((x)(x \in y \in z\,.\supset: x \in z\,.\supset Fx) \supset: y \in z\,.\supset Fy),$$

すなわち，

$$(y)((x)(\langle x, y\rangle \in \mathfrak{E} \restriction z\,.\supset: x \in z\,.\supset Fx) \supset: y \in z\,.\supset Fy). \tag{2}$$

1　この証明は吉田夏彦に負う．

$z \in \mathrm{NO}$ なので，$\mathrm{Fnd}\,\mathfrak{E}\restriction z$. これと (1) と (2) から，20.5 により，任意の u に対して，$u \in z\ .\supset Fu$ なることをうる．それゆえ，$(x)(x \in z\ .\supset Fx)$. したがって，仮説により ($y$ に z をとって)，Fz.

以下二つの系がつづく．最初の系は前提を強めた 23.16 にすぎない．

23.17 $$(y)((x)(x \in y\ .\supset Fx) \supset Fy)\ .\ z \in \mathrm{NO}\ .\supset Fz.$$

23.18[2] $$\alpha \subseteq \breve{\mathfrak{E}}``\alpha\ .\supset.\ \alpha \cap \mathrm{NO} = \Lambda.$$

証明. 仮説により，

$$(y)(y \in \alpha\ .\supset (\exists x)(x \in \alpha\ .\ x \in y)).$$

すなわち，

$$(y)((x)(x \in y\ .\supset.\ x \notin \alpha) \supset.\ y \notin \alpha).$$

そのとき，23.17 により，任意の $z \in \mathrm{NO}$ に対して，$z \notin \alpha$. それゆえ，$\alpha \cap \mathrm{NO} = \Lambda$.

次の定理型は 23.6 の逆で，それゆえ，順序数に適用したときの「$\in$」と「$\subset$」の交換可能性を完成する．この逆は，23.6 と異なり，z と同様 α も順序数である——あるいは，少なくとも順序数の「$\bigcup\alpha \subseteq \alpha$」という特徴を分けもっている，という仮定を要求する[3].

23.19 $$\bigcup\alpha \subseteq \alpha \subset z \in \mathrm{NO}\ .\supset.\ \alpha \in z.$$

証明. 仮説により，$z \cap \bar{\alpha} \neq \Lambda$. しかし，仮説と 23.8 により，$z \subset \mathrm{NO}$. それゆえ，$z \cap \bar{\alpha} \cap \mathrm{NO} \neq \Lambda$. それゆえ，23.18 により，

$$z \cap \bar{\alpha} \nsubseteq \breve{\mathfrak{E}}``(z \cap \bar{\alpha}).$$

それゆえ，次のような w がある，

$$w \in z, \quad (1) \qquad\qquad w \notin \alpha, \quad (2)$$

そして，$(v)(v \in z\ .\ v \notin \alpha\ .\supset.\ v \notin w)$，すなわち，$w \cap z \subseteq \alpha$. しかるに，(1) と 23.6 により $z \in \mathrm{NO}$ なので，$w \subset z$. それゆえ，

$$w \subseteq \alpha. \tag{3}$$

任意の $x \in \alpha$ を考えよう．そのとき，$x \subseteq \bigcup\alpha$. かくして，第 1 の仮説により，$x \subseteq \alpha$. それゆえ，(2) により，

$$w \notin x, \quad w \neq x. \qquad [\mathrm{i}]$$

2 この定理型は大江晁に負う．

3 ここで，「x」のかわりに「α」を用いている点は，Joseph Sukonick に負う．証明では，本質的な点で，Robinson に従う．

$x\in\alpha$ であるから，仮説により，$x\in z\in \mathrm{NO}$. それゆえ，(1)と23.10により，

$$w\in x\ .\mathbf{v}.\ x\in w\ .\mathbf{v}.\ w=x.$$

したがって，[i]により，$x\in w$. しかるに，x は α の任意のメンバーであった．それゆえ，$\alpha\subseteq w$. したがって，(3)により，$\alpha=w$. それゆえ，(1)により，$\alpha\in z$.

上の定理型は，その逆と結びついて，次式を与える：

23.20 $$x, y\in \mathrm{NO}\ .\supset:\ x\in y\ .\equiv.\ x\subset y.$$

証明. 仮説と定義により，$\bigcup x\subseteq x$. それゆえ，仮説と23.19により，$x\subset y\ .\supset.\ x\in y$. 逆は23.6による．

NOは入れ籠である；すなわち，おのおのの順序数は，それぞれの部分クラスであるか，それぞれを含むクラスである．

23.21 $$x, y\in \mathrm{NO}\ .\supset:\ x\subseteq y\ .\mathbf{v}.\ y\subseteq x.$$

証明. 次のような任意の $w\in\mathrm{NO}$ を考えよう，

$$(z)(z\in w\ .\supset:\ x\subseteq z\ .\mathbf{v}.\ z\subseteq x). \qquad [\mathrm{i}]$$

すなわち，

$$(z)(z\in w\ .\supset:\ x\subseteq z\ .\mathbf{v}.\ z\subset x). \qquad [\mathrm{ii}]$$

しかるに，任意の $z\in w$ に対して，23.8により，$z\in\mathrm{NO}$ をうる．それゆえ，23.20により，$z\in x\ .\equiv.\ z\subset x$. したがって，[ii]は次のようになる：

$$(z)(z\in w\ .\supset:\ x\subseteq z\ .\mathbf{v}.\ z\in x). \qquad [\mathrm{iii}]$$

ケース1: ある $z\in w$ に対して，$x\subseteq z$. $w\in\mathrm{NO}$ であるから，23.6により，$z\subset w$. それゆえ，$x\subseteq w$.

ケース2: いかなる $z\in w$ に対しても，$x\subseteq z$ でない．そのとき，[iii]により，すべての $z\in w$ に対して，$z\in x$. すなわち，$w\subseteq x$.

いずれのケースもともに：$x\subseteq w\ .\mathbf{v}.\ w\subseteq x$. しかるに，$w$ は[i]を満足する任意の順序数であった．それゆえ，

$$(w)((z)(z\in w\ .\supset:\ x\subseteq z\ .\mathbf{v}.\ z\subseteq x)\ .\ w\in\mathrm{NO}\ .\supset:\ x\subseteq w\ .\mathbf{v}.\ w\subseteq x).$$

これから，23.16に従う超限帰納法によって，$y\in\mathrm{NO}$ であるから，$x\subseteq y\ .\mathbf{v}.\ y\subseteq x$ が帰結する．

以下二つの系が結果する.

23.22 $x, y \in \mathrm{NO} . \supset : x \subseteq y . \mathbf{v} . y \in x.$

23.23 $x, y \in \mathrm{NO} . \supset : x \in y . \mathbf{v} . y \in x . \mathbf{v} . x = y.$

これらの**証明**は 23.21 と 23.20 による，23.21 における「$y \subseteq x$」は「$y \subset x$」に対して余計であるから.

われわれは，順序数のさまざまな法則が NO に対しても成立するのを見た．この点は，いま，23.23 においてさらに例証されているが，23.23 は 23.10 が各順序数について主張したこと，すなわち，おのおのの順序数が $\mathfrak{E}$ によって結合されているということを，NO それ自身について主張している．次の法則は，23.19 あるいは 23.20 に対して同様な関係にある.

23.24 $\cup \alpha \subseteq \alpha \subset \mathrm{NO} . \equiv . \alpha \in \mathrm{NO}.$

証明. 23.19 の証明をまねて，しかし，z と 23.10 のかわりに NO と 23.23 を用いて，

$$\cup \alpha \subseteq \alpha \subset \mathrm{NO} . \supset . \alpha \in \mathrm{NO}$$

なることが示される．逆は 23.8 と 22.15 による.

順序数の任意のクラス α に対して，$\cup \alpha$ に関するもうひとつの点は，それが NO でなければ，それ自体ひとつの順序数だ，ということである.

23.25 $\alpha \subseteq \mathrm{NO} . \supset : \cup \alpha \in \mathrm{NO} . \mathbf{v} . \cup \alpha = \mathrm{NO}.$

証明. $\alpha \subseteq \mathrm{NO}$ であるから，定義により，任意の $y \in \alpha$ に対して $\cup y \subseteq y$，それゆえ，$z \in w \in y . \supset . z \in y$ がえられる．そこで，

$$(y)(z)(w)(z \in w \in y \in \alpha . \supset . z \in y \in \alpha).$$

したがって，$\cup \cup \alpha \subseteq \cup \alpha$．また，$\alpha \subseteq \mathrm{NO}$ なので，$\cup \alpha \subseteq \cup \mathrm{NO}$，さらに，そのとき，23.9 により，$\cup \alpha \subseteq \mathrm{NO}$ がえられる．それゆえ，$\cup \cup \alpha \subseteq \cup \alpha \subseteq \mathrm{NO}$．したがって，$\cup \alpha = \mathrm{NO}$ か，または，23.24 によって，$\cup \alpha \in \mathrm{NO}$.

われわれが「$\in$」は順序数の「$<$」であることを反省すれば，次の定理は，もし x の後の順序数 y がいやしくも存在するならば，$x \cup \{x\}$ は x のすぐ次の順序数である，という趣旨のことをのべている.

23.26 $x \in y \in \mathrm{NO} . \supset . x \cup \{x\} \in y . \mathbf{v} . x \cup \{x\} = y.$

証明. 仮説と 23.9 により，$x \in \mathrm{NO}$. それゆえ，23.3 により，$x = \bigcup(x \cup \{x\})$，したがって，

$$\bigcup(x \cup \{x\}) \subseteq x \cup \{x\}. \qquad (1)$$

仮説により，$\{x\} \subseteq y$，さらにまた，23.6 を考慮すると，$x \subset y$. それゆえ，$x \cup \{x\} \subseteq y$. したがって，証明さるべき $x \cup \{x\} = y$ であるか，または，$x \cup \{x\} \subset y$ である，この場合には，(1) と仮説により，

$$\bigcup(x \cup \{x\}) \subseteq x \cup \{x\} \subset y \in \mathrm{NO}.$$

したがって，23.19 により，$x \cup \{x\} \in y$.

結びに，順序数のあるクラスの最小のメンバーというテーマにもどる；23.11 参照.

23.27 $$\Lambda \neq \alpha \subseteq \mathrm{NO} \,.\!\supset\!.\, \bigcap\alpha \in \alpha.$$

証明. 仮説により，$\alpha \cap \mathrm{NO} \neq \Lambda$. それゆえ，23.18 により，$\alpha \not\subseteq \breve{\mathfrak{E}}``\alpha$. したがって，ある $x \in \alpha$ に対して，

$$(y)(y \in \alpha \,.\!\supset\!.\, y \notin x). \qquad (1)$$

しかるに，$\alpha \subseteq \mathrm{NO}$，それゆえ，任意の $x, y \in \alpha$ に対して $x, y \in \mathrm{NO}$，そこから，23.22 により，$x \subseteq y \,.\mathbf{v}.\, y \in x$. それゆえ，(1) により，$(y)(y \in \alpha \,.\!\supset\!.\, x \subseteq y)$. すなわち，8.13 により，$x \subseteq \bigcap\alpha$. しかるにまた，8.14 により，$x \in \alpha$ なので，$\bigcap\alpha \subseteq x$. したがって，$x = \bigcap\alpha$. ゆえに，$\bigcap\alpha \in \alpha$.

24. 順序数の順序

順序数の順序づけ，順序数のあいだの大小関係は，$\mathfrak{E} \cap (\mathrm{NO} \times \mathrm{NO})$ である．より簡潔には，

24.1 $$\mathfrak{E} \restriction \mathrm{NO} = \mathfrak{E} \cap (\mathrm{NO} \times \mathrm{NO}).$$ **証明**：22.14, 23.9.

その全域は NO である.

24.2 $$(\mathfrak{E} \restriction \mathrm{NO} \cup \breve{}(\mathfrak{E} \restriction \mathrm{NO}))``\mathfrak{V} = \mathrm{NO}.$$

証明. 23.1 により，$\{\Lambda\} \in \mathrm{NO}$，したがって，$\Lambda \in (\mathfrak{E} \restriction \mathrm{NO})``\mathfrak{V}$. 23.2 により，$\Lambda$ 以外のすべての $x \in \mathrm{NO}$ に対して，$\langle \Lambda, x \rangle \in \mathfrak{E} \restriction \mathrm{NO}$，したがって，$x \in \breve{}(\mathfrak{E} \restriction \mathrm{NO})``\mathfrak{V}$. 逆の包含は 24.1 による.

さて，順序数が整列されているという定理に移る.

24.3 $\text{Wellord } \mathfrak{E}\restriction\text{NO}.$

証明. 任意の $w \in \text{NO}$ に対して，22.15 により，われわれは $\bigcup w \subseteq w$ を有する．それゆえ，

$$(u)(v)(w)(u \in v \in w \in \text{NO} \,.\supset.\, u \in w \in \text{NO}).$$

したがって，$\mathfrak{E}\restriction\text{NO}|\mathfrak{E}\restriction\text{NO} \subseteq \mathfrak{E}\restriction\text{NO}$. さらに，23.4 により，$\mathfrak{E}\restriction\text{NO} \subseteq {}^{-}I$. さらに，23.23 によって，すべての $y, z \in \text{NO}$ に対して，$\langle y, z\rangle \in \mathfrak{E}\restriction\text{NO} \cup \breve{}(\mathfrak{E}\restriction\text{NO}) \cup I$; それゆえ，24.2 によって，Connex $\mathfrak{E}\restriction\text{NO}$. 結びつけて，

$$\text{Ordg } \mathfrak{E}\restriction\text{NO}. \qquad (1)$$

$x \subseteq \breve{}(\mathfrak{E}\restriction\text{NO})\text{“}x$ なる任意の x を考えよう．あきらかに，$x \subseteq \text{NO}$. また，23.18 によって，$x \cap \text{NO} = \Lambda$. それゆえ，$x = \Lambda$. したがって，20.2 により，Fnd $\mathfrak{E}\restriction\text{NO}$. それゆえ，(1) と 21.4 により，Wellord $\mathfrak{E}\restriction\text{NO}$.

順序数のおのおのについて真なることはすべて NO について真であると，ほとんど，いうことができる；なぜなら，23.9 と 24.3 が証拠だてるように，NO 自身 22.15 の「x」に関する二つの条件を満足するからである．完全にそうとはいえないのはなぜであろうか？ 順序数のおのおのについては真であって，しかも NO については真でないようなひとつのことというのは，それが順序数である，ということである．これは，23.7 において NO について否定されている．だが，NO が順序数を定義する二つの条件を満足しているときに，どのようにしてそれを NO について否定できるのであろうか．答えは，$\text{NO} \notin \mathfrak{V}$ ということである．クラスに属するためには，メンバー性の条件を満足するだけでは十分ではない；存在が要求される．

「$\text{NO} \notin \mathfrak{V}$」の証明は目前にある：もしも NO が存在したとするならば，23.9 と 24.3 は 23.7 に矛盾するであろう．

24.4 $\text{NO} \notin \mathfrak{V}.$

「$\text{NO} \notin \mathfrak{V}$」は，本質的には，有名な逆理のひとつ：最大の順序数が存在しなければならず，かつ，存在してはならない，と論ずるブラリ-フォルティ (Burali-Forti) の逆理，の骨ぬきにされた状態である．歴史的には，これが，1897 年に始まる集合論の逆理の最初のものであった[1]. その当時，ブラリ-フォルティは，その矛盾を順序数の比較可能性の帰

1 Cantor の *Gesammelte Abhandlungen* に発表されている文献の中で，Fraenkel は，Cantor が 1895 年までにはこの逆理に気づき，1896 年にそれを Hilbert に伝えたと主張している (470 ページ).

謬法としてだけ理解し，その比較可能性をいかにしてうまく論ずることができるかを評価していなかった．現在では，この逆理は，メンバー性の条件がすべてクラスを決定する，とは仮定しないことによって，他の逆理とおなじように処理されている；かくして，われわれの「$\mathrm{NO} \notin \mathfrak{V}$」が生ずるのである．

順序数の整列順序づけのさほど奇妙ではない帰結は次の系で，これは§23のはじめに言及されていた．

24.5　　$\bigcup x \subseteq x \subseteq \mathrm{NO} .\equiv. x \in \mathrm{NO}.$

証明．24.4によって除かれる「$x=\mathrm{NO}$」という選択肢を別にすれば，これは23.24の一ケースである．

順序数の順序づけ $\mathfrak{E}\restriction\mathrm{NO}$ の重要な構造上の特徴のひとつは，それが整列順序づけであるという事実(24.3)を別にすれば，それが最終項をもたない，ということである．これを証明することが，この節の主な残りの仕事である．それは，どの順序数 x に対しても，それ以上の順序数である後続者 $x \cup \{x\}$ が存在する，ということを証明することによって，証明される．

順序数が有する後続者はどれも順序数であることを証明するのは容易である．

24.6　　$\acute{\mathrm{S}}\text{“}\mathrm{NO} \subseteq \mathrm{NO}.$

証明．もし $x \in \acute{\mathrm{S}}\text{“}\mathrm{NO}$ ならば，$x=y \cup \{y\}$ なる $y \in \mathrm{NO}$ がある．23.3により，$y=\bigcup x$．それゆえ，$\bigcup x \subseteq x$．また，23.8により，$y \subset \mathrm{NO}$，したがって，$x \subseteq \mathrm{NO}$．それゆえ，24.5により，$x \in \mathrm{NO}$．

有限順序数は順序数なることが結果する．

24.7　　$\omega \subseteq \mathrm{NO}.$

証明．23.1と22.8により，$\omega \subseteq {}^*\acute{\mathrm{S}}\text{“}\mathrm{NO}$．しかるに，24.6と15.7により，${}^*\acute{\mathrm{S}}\text{“}\mathrm{NO}=\mathrm{NO}$．

次式が困難な部分である．

24.8　　$x \in \mathrm{NO} .\supset. x \cup \{x\} \in \mathfrak{V}.$

証明．22.11は $x \in \omega$ なる場合をつくしている．そこで，

$$x \notin \omega \qquad (1)$$

と仮定しよう．$y \cup \{y\} = z \cup \{z\}$ で $y, z \in \mathrm{NO}$ なるときには，23.3により，$y=z$ がえられる．それゆえ，$\mathrm{Func}\,\breve{}(\acute{\mathrm{S}}\restriction\mathrm{NO})$．したがって，24.7により，$\mathrm{Func}\,\breve{}(\acute{\mathrm{S}}\restriction\omega)$．22.10により，

この関数の全域は ω のうちにあり，それゆえ，関数 $I\restriction\overline{\omega}$ の全域とは共通のメンバーをもたない．したがって，

$$\text{Func}\ \breve{}(\acute{\text{S}}\restriction\omega)\cup I\restriction\overline{\omega}. \tag{2}$$

7.6 により，すべての u に対して，$\Lambda\neq u\cup\{u\}$．それゆえ，$\Lambda\notin\acute{\text{S}}``\mho$．また，22.9 により，$\Lambda$ は $I\restriction\overline{\omega}$ の全域のメンバーでもない．したがって，Λ は，(2) にのべられている関数の右域には含まれない．そこで，

$$\alpha=\breve{}(\acute{\text{S}}\restriction\omega)\cup I\restriction\overline{\omega}\cup\{\langle x,\Lambda\rangle\} \tag{3}$$

なるとき，(2) と 10.7 により，

$$\text{Func}\,\alpha \tag{4}$$

がえられる．(1) と 22.9 により，$x\neq\Lambda$．それゆえ，仮説と 23.2 により，$\Lambda\in x$．しかるに，(3) により，$\langle x,\Lambda\rangle\in\alpha$．したがって，

$$x\in\alpha``x. \tag{5}$$

任意の

$$y\in x \qquad [\text{i}]$$

を考えよう．

ケース 1: $y\in\omega$．このとき，22.12 により，$y\cup\{y\}\in\omega$．それゆえ，(1) により，$x\neq y\cup\{y\}$．したがって，[i]，仮説，および 23.26 により，$y\cup\{y\}\in x$．さらに，定義により，$\langle y,y\cup\{y\}\rangle\in\breve{}(\acute{\text{S}}\restriction\omega)$，それゆえ，(3) により，$\langle y,y\cup\{y\}\rangle\in\alpha$．ゆえに，$y\in\alpha``x$．

ケース 2: $y\notin\omega$．このとき，(3) により，$\langle y,y\rangle\in\alpha$．そこで，[i] により，$y\in\alpha``x$．

いずれのケースもともに：[i] を満足するすべての y に対して，$y\in\alpha``x$．それゆえ，$x\subseteq\alpha``x$．したがって，(5) により，$x\cup\{x\}\subseteq\alpha``x$．したがって，仮説，(4)，および 23.13 により，$x\cup\{x\}\in\mho$．

上の定理と 24.6 から，22.12 が 22.11 と 23.10 から帰結したように，求める系が結果する．

24.9 $\qquad x\in\text{NO}\,.\supset.\,x\cup\{x\}\in\text{NO}.$

α が順序数の任意のクラスであるとき，そのクラスのすべての順序数よりつぎに大きい順序数は，もしそれが存在すれば，つねに $\alpha\cup\bigcup\alpha$ であることを示すことによって，私は，この章を終る．まず，$\alpha\cup\bigcup\alpha$ は，それが存在すれば，順序数であることを証明しよう．

24.10 $\qquad \alpha\subseteq\text{NO}\,.\supset:\alpha\cup\bigcup\alpha\in\text{NO}\,.\mathbf{v}.\,\alpha\cup\bigcup\alpha=\text{NO}.$

証明は，もし $\alpha\cup\bigcup\alpha=\bigcup\alpha$ であれば，23.25 による．その他の場合には，$(y)(y\in\alpha\,.\supset.$

$x \notin y$) なる $x \in \alpha$ がある．しかるに，そのとき，仮説と 23.22 により，$(y)(y \in \alpha . \supset . y \subseteq x)$. すなわち，8.5 により，$\bigcup\alpha \subseteq x$. しかるに，また，8.6 により，$x \subseteq \bigcup\alpha$. それゆえ，$x = \bigcup\alpha$. だが，$x$ は $\alpha \cap {}^{-}\bigcup\alpha$ の任意のメンバーであった，そして，そのようなものが存在した．それゆえ，$\alpha \cap {}^{-}\bigcup\alpha = \{x\}$. したがって，$\alpha \cup \bigcup\alpha = \bigcup\alpha \cup \{x\}$. すなわち，$\alpha \cup \bigcup\alpha = x \cup \{x\}$. それゆえ，24.9 により，$\alpha \cup \bigcup\alpha \in \mathrm{NO}$.

示さねばならぬもうひとつのことというのは，この順序数 $\alpha \cup \bigcup\alpha$ は α の中のすべてのものよりも次に大きい順序数である，ということであった；印象的に表わせば，

$$(x)(x < \alpha \cup \bigcup\alpha . \equiv : x \in \alpha . \mathbf{v} (\exists y)(x < y \in \alpha)).$$

順序数に対する「<」は「$\in$」なので，この式は，むしろ，次のようになる：

$$(x)(x \in \alpha \cup \bigcup\alpha . \equiv : x \in \alpha . \mathbf{v} (\exists y)(x \in y \in \alpha)).$$

だが，これは定義から直接生ずる．

クラス α は最大のメンバーをもつこともあるし，もたないこともある；これら二つのケースは 24.10 の証明において区別されている．どちらにせよ，順序数 $\alpha \cup \bigcup\alpha$ は α の中のすべてのものより次に大きい．もし α が最大のメンバー x をもっているなら，x は $\bigcup\alpha$ であり，$\alpha \cup \bigcup\alpha$ はその後続者である．もし α が最大のメンバーをもたないなら，$\alpha \cup \bigcup\alpha$ は，単に，$\bigcup\alpha$，ひとつの極限順序数，α の極限である．ここでは，α が奇数の有限順序数すべて，あるいは素数の有限順序数すべてのクラスであってもよい；すると，その極限 $\bigcup\alpha$ は ω である．

VIII. 超限回帰法

25. 超限回帰法

関数を特定化する方法としての回帰法は，和，積，および巾の古典的なケースによってよく知られている．そこで，積に対する回帰法をとろう：

(i) $$x \cdot 0 = 0, \qquad x \cdot (\mathrm{S}`z) = x + x \cdot z.$$

そのような回帰法を，真正のあるいは直接的な定義に，どのようにして変えることができるか，をわれわれは見た(§ 11)：

(ii) $$x \cdot y = (\lambda_v(x+v))^{|y}`0.$$

(i)の一般的なパターンは次のように表わしてよい：

(iii) $$\alpha`0 = k, \qquad \alpha`(\mathrm{S}`z) = \beta`(\alpha`z),$$

そして，直接化(ii)の一般的なパターンは次のように表わしてよい：

(iv) $$\alpha`y = \beta^{|y}`k \qquad (\text{あるいは，} \alpha = \lambda_y(\beta^{|y}`k)).$$

関係の反復のこの記法の定義((viii), § 11)を調べることによって構造をさらに明らかにしよう．w が $\langle k, 0\rangle \in w$ なる系列であり，かつ $w|\mathrm{S}|\breve{w} \subseteq \beta$ なる場合，$\beta^{|y}`k$ が $w`y$ として定義されているのが分る．したがって，(iv)は，掛け値なしに，自然数 y のおのおのに対して $\alpha`y$ を任意のそのような系列 $w$ に対する $w`y$ と同一視する，という効果をもっている——ただし，もちろん，w は，有限ではあるが，y を独立変項として取ることを禁じないという条件がついている．関数 α 自身は，現に，あらゆる自然数 y を独立変項として取るのを認めているので，無限系列とみなされてもよい．それは，記述された有限系列 w のひとつひとつに関するかぎり，それらと一致するが，それら有限系列のそれぞれを超えている；実際，それは，それらすべての合併である．

(v) $$\alpha = \bigcup \{w : w \in \mathrm{Seq} \,.\, \langle k, 0\rangle \in w \,.\, w|\mathrm{S}|\breve{w} \subseteq \beta\}.$$

それが(iv)の真意である．

われわれの(iv)の例は(ii)であった．それに対応する(v)の例は次のものである：

(vi) $$\lambda_y(x \cdot y) = \bigcup \{w : w \in \mathrm{Seq} \,.\, \langle 0, 0\rangle \in w \,.\, w|\mathrm{S}|\breve{w} \subseteq \lambda_v(x+v)\}.$$

形式(v)および(vi)は，(iv)および(ii)ほど明瞭ではないが，私がそれらを持ちこむのは二つの拡張に対する方法を用意するためである．

(v)を直観的な用語で要約しよう．それは，α を，k から β によって生成される無限系列と同一視する．かくして，とくに，(vi)は，『x-倍』関数を，0 から『x-プラス』関数によって生成される無限系列として説明する．おなじようにして，『x-巾乗』関数，$\lambda_y(x^y)$，は 1 から『x-倍』関数によって生成される無限系列として記述できるようになる；そして，『x-プラス』関数は x から S によって生成される無限系列である．

かくして，少なくとも和，積，および巾に対する古典的な回帰法において具体化されているような回帰法の本質とは，このようなものなのである．回帰法が定義するものは，ある無限系列 α，あるいは，すべての自然数の上での関数である．回帰法は，α が何によって何から生成されるか：つまり，k から β によって生成されるということ，を語ることによって系列を定義する．α を『回帰的に定義する』これら二つのデータ β と k とによって，その α をどのように直接的に表現するかが(v)に示されている．

だが，回帰法のこの表現法は，和，積，巾，および他の簡単な例には適しているが，α の後続する値のおのおのを，ちょうどそれに先行する値によって決定することを β に要求している点で，不必要にせまい．回帰法の適度に寛容な表現法は，α の後続する値のおのおのが，むしろ，それ以前の値の推移全部に依存するのを認めようとする．さて，それ以前の値のこの推移——与えられた独立変項 y より以前の独立変項に対する α の値の推移——というのは，単に，その点で切りとられた α の切株であるにすぎない；かくして，系列 $\alpha \upharpoonright \{z : z < y\}$ である．それゆえ，β にかわって寛容化のためにわれわれが欲しいのは，後続する y のおのおのに対して，(単に，$\alpha‘y = \beta‘(\alpha‘(\breve{S}‘y))$ ではなく；(iii)参照)

(vii) $$\alpha‘y = \gamma‘(\alpha \upharpoonright \{z : z < y\})$$

なる γ である．この γ は，独立変項としての α の切株のおのおのに対して次にくるものを特定化することによって，系列 α を生成する．

それに応じて，(v)を拡張しよう．k から始まり，かつ $w|S|\breve{w} \subseteq \beta$ なる有限系列 w の無限の合併であるかわりに，α は，いまや，むしろ，k から始まり，かつ

(viii) $$(y)(y \in \breve{w}“\mho \,.\supset.\, w‘y = \gamma‘(w \upharpoonright \{z : z < y\}))$$

なる有限系列 w の無限の合併でなければならない．すなわち，

$$\alpha = \bigcup \{w : w \in \mathrm{Seq} \,.\, \langle k, 0\rangle \in w \,.\, (y)(y \in \breve{w}“\mho \,.\supset.\, \langle w‘y, w \upharpoonright \{z : z < y\}\rangle \in \gamma)\}.$$

実際，γ は k がなくても十分なデータである；なぜなら，k は(viii)の w‘0 でなければならず，かくして，γ‘Λ であるから．したがって，われわれの拡張された回帰法型(recursion schema)は：

$$\text{(ix)}\qquad \alpha = \cup\{w : w \in \mathrm{Seq}\,.\,(y)(y \in \breve{w}``\mho\,.\supset.\,\langle w`y, w\restriction\{z : z < y\}\rangle \in \gamma)\}$$

となる．

かくして，これが寛容になった回帰法：走値回帰法(course-of-values recursion)，の本質である．それは，無限系列，あるいはすべての自然数の上での関数を定義するが，その定義は，どのような関数 γ が無限系列を生成するか——生成の改変された意味において——を語ることによって定義するにすぎない．α の生成は，いまや，α の後続値を，ちょうど先行しているそれぞれの単一の値によってではなくして，どれほど多くの α の値がこれまでに生成されているか，によって特定化することを意味している．

整列順序づけへの拡張を，さらには，基礎づけられた関係一般への拡張さえをもやかましく要求し，そして，超限帰納法として姿を現わしたのは走値帰納法(§ 20)であった．同様な展開が回帰法においてなされようとしている：つまり，われわれの走値回帰法は，ただちに，超限的な拡張を許すのである．われわれの α は無限系列であるが，それは，独立変項としてすべての自然数をとるという意味において，無限系列であるにすぎない．われわれは，超限系列：独立変項として有限および超限順序数の双方を認める関数，へと進んでゆくことができる．

まずはじめに，この拡張された意味での系列の定義が要求される．われわれは，これらの系列を，その右域がある順序数より小さい順序数のすべてをふくむ関数として——それゆえ，単に，その右域が順序数であるような関数として定義してよい．さらに，われわれは，右域が NO であるようなケースも加える；これらの極端な系列は，存在するとは期待されないが，仮クラスの用はする．これらを考慮すると，拡張された系列の観念は，「Seq」のようにクラスという項によるのではなく，述語によって与えられるのがもっともよい．

25.1 「SEQ α」は「Func α: $\breve{\alpha}``\mho \in \mathrm{NO}\ .\mathbf{v}.\ \breve{\alpha}``\mho = \mathrm{NO}$」を表わす．

さて，走値回帰法型(ix)を超限の場合に拡張するには，われわれは，「$w \in$ Seq」を「SEQ w」に変え，それに伴ない，われわれが現在用いているのはツェルメロの意味での自然数ではなく，フォン・ノイマンの意味での順序数であることを認識して，「$\{z : z<y\}$」を「y」に単純化しさえすればよい．このように改められた(ix)がのべている α は，ベル

ナイスに従って，$\mathrm{A}\gamma$ とよばれるであろう．

25.2　「$\mathrm{A}\gamma$」は「$\cup\{w: \mathrm{SEQ}\, w\,.\,(y)(y \in \breve{w}``\mho\,.\supset.\langle w`y, w\restriction y\rangle \in \gamma)\}$」を表わす．

ここで γ は関数――ハルモス (Halmos) がそうよんでいるような**系列関数**(*sequence function*)――で，求める系列の後続値のおのおのを，それ以前の一連の値との関連においてきめる．$\mathrm{A}\gamma$ は，γ がこのようにして生成する系列である．われわれは，$\mathrm{A}\gamma$ を γ の**累積**(*accumulate*)とよんでもよい；それは，γ をそれまでの累積のそれぞれに適用することによって累積される系列全体だからである[1]．

超限回帰法(*transfinite recursion*)は，われわれにとって，上の定義のなかで具体化されている．希望されていた系列は，その累積 $\mathrm{A}\gamma$ が希望された系列であるような系列関数 γ が与えられたとき，超限回帰法によって特定化されていた．

順序数の和 $x+y$ (§22 参照)を定義しなおす手段として，超限回帰法を試みてみよう．ここで，超限回帰法によって定義されるべき系列は $\lambda_y(x+y)$：おのおのの y に対してその(0番目から) y 番目の値 $\alpha`y$ が $x+y$ であるような系列 α，である．求められているもの：$\mathrm{A}\gamma$ が α，もしくは $\lambda_y(x+y)$ なる系列関数 γ．系列 α は，

$$\langle x, 0\rangle,\ \langle \acute{\mathrm{S}}`x, 1\rangle,\ \ldots,\ \langle x+y, y\rangle,\ \ldots$$

をふくむ対のクラスであり，系列関数 γ は，z がそれ以前のすべての対のクラスであるときはいつでも，$\gamma`z$ がそのような対における左側の数となるようなものでなければならない．したがって，希望されている左側の数がちょうど正常な順序における $x$ からの順序数なので，$\gamma`z$ がそうあって欲しいのは，単に，z におけるすべての左側の数よりもつぎに大きい数，いいかえれば，$z``\mho$ のすべてのメンバーよりもつぎに大きい数，ということである．だが，$z=\Lambda$ の場合には例外がある：$\gamma`\Lambda$ は $x$ であってほしい．いま，規則と例外とを結びつけると，$\gamma`z$ は，$z$ のうちのすべての左側の数と $x$ より小さいすべての数とのどちらよりもつぎに大きい数であってほしい，といえる．しかし，$z$ のうちのすべての左側の数から成るクラスは $z``\mho$ であり，x より小さいすべての数から成るクラスは x である；したがって，$\gamma`z$ は $z``\mho\cup x$ のうちのすべてのものよりもつぎに大きい数であってほしい．

1　Bernays は「$\mathrm{A}\gamma$」で「γ の適合子(adaptor)」を表わすつもりであった．「適合子」は示唆的でないと思うので，私は，苦心して，より示唆に富む語をおなじ頭文字に合わせようとした．私は，少なくとも彼の記法は保存したいと思った，というのは，彼の概念は，いったんアプローチの上での違いが区別されると，あきらかに，25.2 で定義されたものだからである．Bernays and Fraenkel, 100 ページ以下を見よ．その本質的な点では，この考えは，von Neumann の『Ueber die Difinition』，さらには，『Zur Einführung』，註 4，にまでさかのぼる．

したがって，§24の終りの箇所を考慮に入れると，われわれがほしいのは：

$$\gamma`z = z``\mho \cup x \cup \bigcup(z``\mho \cup x)$$

(8.3 により) $$= z``\mho \cup x \cup \bigcup(z``\mho) \cup \bigcup x$$

(22.15 により $\bigcup x \subseteq x$ なので) $$= z``\mho \cup \bigcup(z``\mho) \cup x.$$

したがって，γ を

$$\lambda_z(z``\mho \cup \bigcup(z``\mho) \cup x)$$

に，それから，$x+y$ を $\mathrm{A}\gamma`y$ にとることができる.

$x \cdot y$ を超限回帰法によって定義するためには，おのおのの x に対して，$\mathrm{A}\gamma$ が $\lambda_y(x \cdot y)$ となるような系列関数 γ を特定化しなければならないが，$\lambda_y(x \cdot y)$ は，おのおのの y に対してその（0番目から）y 番目の値 $\alpha`y$ が $x \cdot y$ であるような超限系列 α である．さて，希望のこの α，あるいは $\lambda_y(x \cdot y)$ は，

$$\langle 0, 0\rangle,\ \langle x, 1\rangle,\ \langle x+x, 2\rangle,\ \ldots,\ \langle x \cdot y, y\rangle,\ \ldots$$

をふくむ対のクラスである．系列関数 γ は，z がそれ以前のすべての対のクラスであるときはいつでも，$\gamma`z$ がそのような対における左側の数となるようなものでなければならない．したがって，$\gamma`z$ は，つねに，もし最大のものがあれば，$z``\mho$ における最大の数プラス $x$ であってほしい．$z``\mho$ が最大の数をもたず，むしろ x の倍数の終りのない上昇系列から成りたっているときには，無限の対クラス z のつぎにある対は，その左側の数として，x のこれら上昇するすべての倍数の極限もしくは最小上界をもってほしい．$z``\mho$ の最小上界は $\bigcup(z``\mho)$ なので，$z``\mho$ が最大のメンバーをもたないときは，$\gamma`z$ が $\bigcup(z``\mho)$ であるのが分る．

したがって，$\gamma`z$ を，交互に，もし最大のメンバーがあれば，$z``\mho$ の最大のメンバープラス $x$ とし，最大のメンバーがなければ，$\bigcup(z``\mho)$ となるように，γ を定義する．これをどのように表現できるだろうか？ $z``\mho$ は $\breve{z}``\mho$ が最大のメンバーをもつとき，かつそのときにかぎって，最大のメンバーをもつ；また，$\breve{z}``\mho$ は，$z``\mho$ とは違って，それ自身，順序数である；また順序数は，極限順序数ではなくて，むしろ，後続者，$u \cup \{u\}$，をもつとき，かつそのときにかぎって，最大のメンバーをもつ；そして，最後に，$\breve{z}``\mho$ が $u \cup \{u\}$ なるとき，$z``\mho$ の最大のメンバーは $z`u$ である．したがって，

$$\gamma = \{\langle w, z\rangle : (\exists u)(\breve{z}``\mho = u \cup \{u\} \,.\, w = z`u + x) \mathbf{v}. (u)(\breve{z}``\mho \neq u \cup \{u\}) \,.\, w = \bigcup(z``\mho)\}.$$

最後に，$x \cdot y = \mathrm{A}\gamma`y$.

x^y は，$x \cdot y$ とほとんどおなじように定義できる．ここでは，「$z‘u+x$」のかわりに「$(z‘u) \cdot x$」を用いたいはずである．だがまた，とくに，x^0 が 0 ではなくてむしろ 1 であるように準備しなければならない．このことは，「$\cup(z“\mho)$」を「$\cup(z“\mho) \cup \{\Lambda\}$」に変えることによって，結果する．

超限回帰法は，系列 β の総和(summation) $\sum\beta$ を定義することによって，さらに説明できる．もし，とくに，β が $\{x\} \times y$——かくして，直観的には，$x, x, x, \ldots$ が y 箇ある系列——にすぎないならば，$\sum\beta$ は $x \cdot y$ である．したがって，上での $x \cdot y$ の構成を一般化して $\sum\beta$ の一般的な定義方法が見出されよう．さて，系列 α あるいはそれを構成する $A\gamma$ の後続値のおのおのは，その先行者から x を加えることによって生じた．より一般的な構成の新しい $A\gamma$ においては，後続値のおのおのは，その先行者，たとえば(0番目からの) v 番目から，$\beta‘v$ を加えることによって生じてほしい．この結果をうるためには，「x」を「$\beta‘u$」に変える範囲で上での γ の定式化を変えさえすればよい．このように修正された γ に対して，$A\gamma$ は，系列 β を累積的に加えてゆく系列である．それは，β の長さまでのおのおのの v に対して，その(0番目から) v 番目の値 $A\gamma‘v$ が系列 β の最初の v 箇の値の和であるような系列である．すると，$\sum\beta$ 自身は，最後の値があれば，系列 $A\gamma$ の最後の値——$A\gamma“\mho$ の最大のメンバー——であり，さもなければ，極限である．どちらにせよ，$\sum\beta = \cup(A\gamma“\mho)$．そこで，$\sum\beta$ の定義をうる．

これが与えられていれば，もちろん，積をもっと簡潔に定義できたでもあろう：$x \cdot y = \sum(\{x\} \times y)$．

すると，総積(productation)，$\Pi\beta$，を総和と類比的に(しかし $\Pi\Lambda = 1$ と調整して)定義できる．最後に，$x^y = \Pi(\{x\} \times y)$．

26. 超限回帰法の法則[1]

われわれは，$A\gamma$ に対して，独立変項 y のおのおのに対するその値が，y までのその切株の γ である；それゆえ，その値が $\gamma‘(A\gamma \restriction y)$ であるような，主要系列である，ことを要求している．そこで，われわれは，SEQ $A\gamma$ であること，および，一般に，$A\gamma‘y$ は $\gamma‘(A\gamma \restriction y)$ であることを示さなければならない．最後に，$A\gamma$ はそのようなある系列が続くかぎり続くこと：つまり，γ がそれに適用されても，系列 $A\gamma$ の最後にそれ以上なにか，$\gamma‘A\gamma$，をつけ加えることはできない，ということをわれわれは示さなければならない．それが，こ

1 この節は初版といちじるしく異なる．主な改善は Parsons に負う，その項目参照．

の節の筋書である.

次の補助定理は，これら筋書のひとつ，すなわち，$A\gamma`y$ が $\gamma`(A\gamma\restriction y)$ であることを示すのに，おおいに役だつ.

26.1 $\quad \mathrm{Func}\ A\gamma\restriction y\,.\,\langle x, y\rangle\in A\gamma\,.\supset.\,\langle x, A\gamma\restriction y\rangle\in\gamma\,.\,A\gamma\restriction y\in\mho.$

証明. 第2の仮説と25.2により，次のような w がある，

$$w\subseteq A\gamma,\ (1)\qquad \langle x, y\rangle\in w,\ (2)\qquad \mathrm{SEQ}\,w,\ (3)$$

$$(z)(z\in\breve{w}``\mho\,.\supset.\,\langle w`z, w\restriction z\rangle\in\gamma). \tag{4}$$

(2)により，

$$y\in\breve{w}``\mho. \tag{5}$$

(3)と25.1により，$\breve{w}``\mho\in\mathrm{NO}$ あるいは $\breve{w}``\mho=\mathrm{NO}$. いずれにしろ，(5)，23.6，および23.8によって，

$$y\in\mathrm{NO},\ (6)\qquad y\subset\breve{w}``\mho.\ (7)$$

(7)により，$y=\breve{}(w\restriction y)``\mho$. しかるに，

$$\breve{}(A\gamma\restriction y)``\mho\subseteq y. \tag{8}$$

それゆえ，$\breve{}(A\gamma\restriction y)``\mho\subseteq\breve{}(w\restriction y)``\mho$. さらに，(1)により，$w\restriction y\subseteq A\gamma\restriction y$. したがって，第1の仮説と10.10 a により，

$$A\gamma\restriction y = w\restriction y. \tag{9}$$

(3)により，$\mathrm{Func}\,w$. それゆえ，(2)により，

$$x = w`y. \tag{10}$$

(4)と(5)によって，$\langle w`y, w\restriction y\rangle\in\gamma$. したがって，(9)と(10)により，$\langle x, A\gamma\restriction y\rangle\in\gamma$，これは求めるものである. さらに，第1の仮説と(6)と(8)により，23.15によって，$A\gamma\restriction y\in\mho$ がえられる.

次の二つの補助定理は，筋書のもうひとつ，すなわち，$\mathrm{SEQ}\ A\gamma$ を示すのに役だつ.

26.2 $\quad \bigcup(\breve{}A\gamma``\mho)\subseteq\breve{}A\gamma``\mho\subseteq\mathrm{NO}.$

証明. 任意の $z\in\breve{}A\gamma``\mho$ を考えよう. 25.2により，次のような w がある，

$$w\subseteq A\gamma,\ [\mathrm{i}]\qquad z\in\breve{w}``\mho,\ [\mathrm{ii}]\qquad \mathrm{SEQ}\,w.\ [\mathrm{iii}]$$

[ii]と[iii]によって，すぐ上の証明の(6)と(7)におけるように，

$$z \in \mathrm{NO}, \quad [\mathrm{iv}] \qquad z \subset \breve{w}``\mho. \quad [\mathrm{v}]$$

[v] と [i] により，$z \subset \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho$. しかるに，$z$ は $\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho$ の任意のメンバーであった．それゆえ，8.5 により，$\bigcup(\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho) \subseteq \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho$. さらに，[iv] により，$\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho \subseteq \mathrm{NO}$.

26.3 $$\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho \in \mathrm{NO} \,.\mathbf{v}.\, \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho = \mathrm{NO}.$$

証明. $\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho = \mathrm{NO}$ であるか，それとも，26.2 と 23.24 によって，$\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho \in \mathrm{NO}$.

さて，SEQ $\mathrm{A}\gamma$ の証明の残部に移ろう．それには，γ が関数であるという仮定が必要である．

26.4 $$\mathrm{Func}\,\gamma \supset \mathrm{SEQ}\ \mathrm{A}\gamma.$$

証明. $\sim\mathrm{Func}\ \mathrm{A}\gamma$ と仮定しよう．すなわち，$\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho \cap \bar{}\mathrm{arg}\ \mathrm{A}\gamma \neq \Lambda$. このクラスは，26.2 により，順序数から成る．それゆえ，23.27 により，次のようなあるもの z がある，

$$z = \bigcap(\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho \cap \bar{}\mathrm{arg}\ \mathrm{A}\gamma), \qquad [\mathrm{i}]$$

$$z \in \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho, \quad [\mathrm{ii}] \qquad z \notin \mathrm{arg}\ \mathrm{A}\gamma. \quad [\mathrm{iii}]$$

26.2 と [ii] によって，

$$z \subseteq \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho. \qquad [\mathrm{iv}]$$

しかるに，[i] と 23.11 によって，z は $\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho$ および $\bar{}\mathrm{arg}\ \mathrm{A}\gamma$ といかなるメンバーも共有していない．したがって，

$$z \subseteq \mathrm{arg}\ \mathrm{A}\gamma. \qquad [\mathrm{v}]$$

[ii] と [iii] により，次のような x と y がある，

$$x \neq y, \quad [\mathrm{vi}] \qquad \langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \in \mathrm{A}\gamma. \quad [\mathrm{vii}]$$

[v] により，$\mathrm{Func}\ \mathrm{A}\gamma{\restriction}z$. これと [vii] とから，26.1 に従って，

$$\langle x, \mathrm{A}\gamma{\restriction}z\rangle, \langle y, \mathrm{A}\gamma{\restriction}z\rangle \in \gamma, \qquad \mathrm{A}\gamma{\restriction}z \in \mho$$

が結果する．そのとき，仮説により $\mathrm{Func}\,\gamma$ であるから，$x=y$. しかし，これは [vi] に矛盾する．それゆえ，仮定「$\sim\mathrm{Func}\ \mathrm{A}\gamma$」は反証される．したがって，26.3 と 25.1 により，SEQ $\mathrm{A}\gamma$.

われわれの筋書のひとつは，$\mathrm{A}\gamma$ の独立変項 y のおのおのに対して，$\mathrm{A}\gamma`y$ は $\gamma`(\mathrm{A}\gamma{\restriction}y)$ なることを示すことであった．われわれは，この主題を 26.1 につなげる．

26.5 $$\mathrm{Func}\,\gamma \,.\, y \in \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mho \,.\supset.\, \langle \mathrm{A}\gamma`y, \mathrm{A}\gamma{\restriction}y\rangle \in \gamma.$$

証明. 第1の仮説と 26.4 により，Func $\mathrm{A}\gamma$. それゆえ，Func $\mathrm{A}\gamma \restriction y$. しかるに，また，第2の仮説により，$\langle \mathrm{A}\gamma`y, y\rangle \in \mathrm{A}\gamma$. したがって，26.1 により，$\langle \mathrm{A}\gamma`y, \mathrm{A}\gamma\restriction y\rangle \in \gamma$.

われわれの三つの筋書の最後は，$\mathrm{A}\gamma$ が γ の独立変項ではないことを示すことであった．これは，いま，$\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ であるにもかかわらず $\mathrm{A}\gamma \in \mathfrak{V}$ であるようなありそうもないケースのみを除いて，示されるであろう．

26.6 $\quad \mathrm{Func}\,\gamma\,.\,\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}\,.\supset.\,\mathrm{A}\gamma \notin \breve{\gamma}``\mathfrak{V}.$

証明. 第1の仮説と 26.4 により，

$$\mathrm{Func}\ \mathrm{A}\gamma. \tag{1}$$

第2の仮説，26.3，および 24.4 により，

$$\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V} \in \mathrm{NO}. \tag{2}$$

それゆえ，23.4 と 23.5 により，

$$\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V} \notin \breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}, \quad (3) \qquad\qquad \sim(\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V} \in^2 \breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}). \quad (4)$$

$$\alpha = \mathrm{A}\gamma \cup \{\langle \gamma`\mathrm{A}\gamma, \breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}\rangle\} \tag{5}$$

としよう．したがって，

$$\breve{\alpha}``\mathfrak{V} = \breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V} \cup \{\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}\}. \tag{6}$$

それゆえ，(3) と第2の仮説により，$\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}$ は $\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}$ のメンバーではないが，$\breve{\alpha}``\mathfrak{V}$ のメンバーである．そこで，

$$\mathrm{A}\gamma = \alpha \restriction (\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}), \quad (7) \qquad\qquad \alpha \nsubseteq \mathrm{A}\gamma. \quad (8)$$

さらにまた，(1) と 10.7 によって，

$$\mathrm{Func}\ \alpha. \tag{9}$$

(2), (6), および 24.9 によって，

$$\breve{\alpha}``\mathfrak{V} \in \mathrm{NO}. \tag{10}$$

それゆえ，(9) と 25.1 により，

$$\mathrm{SEQ}\ \alpha. \tag{11}$$

(9), (10), および 23.15 により，

$$\alpha \in \mathfrak{V}. \tag{12}$$

(5), (9), および第2の仮説により，

$$\gamma`\mathrm{A}\gamma = \alpha`(\breve{\mathrm{A}\gamma}``\mathfrak{V}). \tag{13}$$

いま，帰謬法の仮定として，

$$\mathrm{A}\gamma \in \breve{\gamma}``\mathfrak{V} \qquad [\mathrm{i}]$$

を仮定しよう．そのとき，第1の仮説により，$\langle \gamma`\mathrm{A}\gamma, \mathrm{A}\gamma \rangle \in \gamma$．すなわち，(13)と(7)により，

$$\langle \alpha`(\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V}), \alpha\upharpoonright(\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V})\rangle \in \gamma. \qquad [\mathrm{ii}]$$

任意の $y \in \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V}$ を考えよう．第1の仮説と26.5により，

$$\langle \mathrm{A}\gamma`y, \mathrm{A}\gamma\upharpoonright y\rangle \in \gamma. \qquad [\mathrm{iii}]$$

(3)により，$y \neq \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V}$；それゆえ，(5)により，$\mathrm{A}\gamma`y = \alpha`y$．(4)により，$\breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V} \notin y$；したがって，(5)により，$\mathrm{A}\gamma\upharpoonright y = \alpha\upharpoonright y$．これら二つの等式に応じて，[iii]に代入すれば，$\langle \alpha`y, \alpha\upharpoonright y\rangle \in \gamma$ がえられる．これは任意の $y \in \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V}$ に対してである．だが，それは，[ii]によって，$y = \breve{}\mathrm{A}\gamma``\mathfrak{V}$ なるときにも成立する．したがって，(6)により，

$$(y)(y \in \breve{\alpha}``\mathfrak{V} \,.\!\supset.\, \langle \alpha`y, \alpha\upharpoonright y\rangle \in \gamma).$$

それゆえ，(11)と(12)により，α は25.2における条件を満足するあるもの w であることが分る．したがって，$\alpha \subseteq \mathrm{A}\gamma$，これは(8)に反する．それゆえ，「$\mathrm{A}\gamma \in \breve{\gamma}``\mathfrak{V}$」は矛盾に導いた．

27. 枚　挙

順序数は整列順序づけの長さを測る．順序数 p は，p より小さい順序数の順序づけの長さを測ることを意図している(§22を見よ)．このとき，整列順序づけ α がその順序数として p をもつ，あるいは，それが長さ p である，ということは，α と，p より小さい順序数の順序づけとのあいだに同型対応が存在する，ということである(§21を見よ)．だが，p より小さい順序数の順序づけは，p より小さい順序数のあいだの関係 $\mathfrak{E}$ である；かくして，p のメンバーのあいだの $\mathfrak{E}$；かくして，$\mathfrak{E} \cap (p \times p)$；かくして，22.14により，$\mathfrak{E}\upharpoonright p$ である．このとき，当の同型対応は，α と $\mathfrak{E}\upharpoonright p$ とのあいだの同型対応である；かくして，その下で一方での順序づけ α が，他方での $\mathfrak{E}$ に平行に走るような，$(\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V}$ と $p$ とのあいだの対応である．あきらかに，この対応は25.1の意味での系列としての資格を有する．さらに，それはただひとつにきまる；$(\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V}$ と順序数とのあいだのひとつの対応だけが順序を保存できる．私は，それを，**α の枚挙**(*the enumeration of* α)，簡単には，$\mathrm{e}\alpha$ とよぶ．いったんこれが定義されると，われわれは，整列順序づけ α の順序数に対する簡潔な表現を有する；それは単に枚挙の右域であり，かくして，$\breve{}\mathrm{e}\alpha``\mathfrak{V}$ である．

インフォーマルには，すべての素数の『列』(series)，あるいはそれらの『系列』(sequence)，あるいは『順序づけ』(ordering) について，なんら技術上の区別を意図せずに，語りたくなる人もあるかもしれない．技術的には，われわれは，後の二つの語句のあいだにはいくぶん恣意的な区別を有している；素数の系列は，25.1 によって，1 の 0 に，2 の 1 に，3 の 2 に，5 の 3 に対する，等々，の関係であり，他方，素数の順序づけは，1 の 2, 3, 5, 等々，に対する，2 の 3, 5, 7, 等々，3 の 5, 7, 11, 等々，に対する関係である．さて，α がこの技術的な意味での順序づけである場合，eα はこの技術的な意味でのそれに対応する系列である；これが，枚挙という観念が結局のところそれに帰着するところのすべてである．事実，順序数 y のおのおのに対する eα'y は，単に，(0 番目に数えられる最初のものの後で) 順序づけ α における y 番目のものである．これ以上自然なことがあろうか？

そうであるとしても，eα はやはり定義されなければならない．それは系列であるはずなので，それを定義する方法は超限回帰法による．したがって，それを定義するのにわれわれが必要とするものは，それの生成系列関数——系列 eα の次の値 x のおのおのの，それまでの eα の全体(それを z とよぶ)に対する関係である．しかるに，その度ごとの z に対する x の関係は，順序づけ α の下で x より前にあるものが系列 z のうちのもの，つまり，関数 z の値，であるということにすぎない．簡潔には，$\alpha``\{x\}=z``\mho$．したがって，eα を生成する系列関数——それを Φ_α とよぼう——は，あきらかに，

$$\{\langle x, z\rangle\colon \alpha``\{x\} = z``\mho\}$$

であり，eα はそれの A である．次のように手を加えさえすればよい：どの $x \notin (\alpha\cup\breve{\alpha})``\mho$ も Λ に対して Φ_α をもつことがないように，「$\cdot z=\Lambda\,.\supset x1\alpha$」という要求を挿入する．したがって，われわれの定義は次のようになる：

27.1　「Φ_α」は「$\{\langle x, z\rangle\colon \alpha``\{x\} = z``\mho : \cdot z = \Lambda\,.\supset x1\alpha$」を表わす[1]．

27.2　「eα」は「AΦ_α」を表わす．

eα の用途のひとつは，注意したように，α の順序数を表現する，すなわち，$\breve{\ }$e$\alpha``\mho$ として表現することにある．だが，他の用途もある．eα'y は順序づけ α において y 番目のもの(プラス 1)なので，このやり方は，とくにわかりやすい種類の超限回帰法を提供する．そこで，再び，順序数の和 $x+y$ をとろう．それは，x 以後 y 番目の順序数であり，かくして，x を 0 番目と数えて，順序数の順序づけにおける x 以後 y 番目のものである．だ

1　Colin Godfrey によって訂正された．

が，x 以後の順序数は x のメンバー以外の順序数である；そして，それらの順序づけは $\mathfrak{E}\cap(\bar{x}\times \mathrm{NO})$ である．したがって，

$$x+y=\mathrm{e}(\mathfrak{E}\cap(\bar{x}\times\mathrm{NO}))`y.$$

これは，§25 の終りの方で到達したところの，おなじ目的に対する超限回帰法よりもいくぶん短かく，はるかに直観的である．読者は両者が等値であることの証明を試みられるとよい．

§21 と §23 で，**枚挙定理** (*enumeration theorem*) をほのめかしておいたが，この定理によれば，任意の整列順序づけとある点までの順序数の順序づけとのあいだには同型対応が存在する．さて，α が整列順序づけである場合，$\mathrm{e}\alpha$ はその同型対応である．したがって，枚挙定理は，われわれにとっては，$\mathrm{e}\alpha$ に希望の性質を帰属させる一連の定理型の形式をとるであろう．ひとつは，$\mathrm{e}\alpha$ が **1–1 対応** (*correspondence*)，もしくは，1-対-1 の関係ということである；最後に，この用語の明確な定義を記しておこう．

27.3 「Cor β」は「Func β . Func $\breve{\beta}$」を表わす．

ひとつは，その左域が α の全域だ，ということである．ひとつは，その右域，$\breve{}\mathrm{e}\alpha``\mathfrak{V}$，がある点までの順序数のクラスであるということ——それゆえ，単に，それがある順序数であるか，あるいは NO である，ということである．そして，最後に，ひとつの性質は，$\mathrm{e}\alpha$ が順序を保存するということ，すなわち，順序数 x が順序数 y より小さい(つまり，$x\in y$)とき，かつそのときにかぎり，$\mathrm{e}\alpha`x$ は $\mathrm{e}\alpha`y$ に対して α なる関係を有する，ということである．

これら四つの性質のうち，第3の性質はただちに見出すことができる．

27.4 $\breve{}\mathrm{e}\alpha``\mathfrak{V}\in\mathrm{NO}\ .\mathbf{v}.\ \breve{}\mathrm{e}\alpha``\mathfrak{V}=\mathrm{NO}.$ **証明**: 26.3, 27.2.

つぎに証明しようとするのは，第1の性質: $\mathrm{e}\alpha$ は 1–1 対応である，ということである．二つの補助定理がそれに先だつ．

27.5 $\mathrm{Ordg}\,\alpha\supset\mathrm{Func}\,\Phi_\alpha.$

証明. 次のような任意の u,v,w を考えよう，

$$\langle u,w\rangle,\langle v,w\rangle\in\Phi_\alpha. \qquad [i]$$

$u=v$ なることを示す．もし $w=\Lambda$ ならば，[i] と 27.1 が $u1\alpha$ と $v1\alpha$ を与える，それゆえ，21.8 と仮説により，$u=v$. 他方，もし $w\neq\Lambda$ ならば，[i] と 27.1 から，

$$\alpha``\{u\} = \alpha``\{v\} = w``\mho \neq \Lambda$$

がえられるが，そのとき，$u, v \in \breve{\alpha}``\mho$，したがって，仮説と 21.5 により，$u=v$.

27.6　$\text{Ordg}\,\alpha\,.\,y \in \breve{}\text{e}\alpha``\mho\,.\supset.\,\alpha``\{\text{e}\alpha`y\} = \text{e}\alpha``y.$

証明. 第1の仮説と 27.5 により，$\text{Func}\,\Phi_\alpha$. それゆえ，26.4 と定義により，$\text{Func}\,\text{e}\alpha$. したがって，$\text{Func}\,\text{e}\alpha{\restriction}y$，さらにまた，第2の仮説により，$\langle \text{e}\alpha`y, y\rangle \in \text{e}\alpha$. それゆえ，26.1 と定義により，$\langle \text{e}\alpha`y, \text{e}\alpha{\restriction}y\rangle \in \Phi_\alpha$，そして，$\text{e}\alpha{\restriction}y \in \mho$. したがって，27.1 により，$\alpha``\{\text{e}\alpha`y\} = (\text{e}\alpha{\restriction}y)``\mho$，これは求めるものである.

さて，順序づけの枚挙は 1–1 対応である，ということの証明に移ろう.

27.7　$\text{Ordg}\,\alpha \supset \text{Cor}\,\text{e}\alpha.$

証明. 上の証明におけるように，

$$\text{Func}\,\text{e}\alpha. \qquad (1)$$

次のような任意の y, z を考えよう，

$$y, z \in \breve{}\text{e}\alpha``\mho,\ [\text{i}] \qquad \text{e}\alpha`y = \text{e}\alpha`z.\ [\text{ii}]$$

(1) と [i] により，

$$y, z \in \text{arg}\,\text{e}\alpha. \qquad [\text{iii}]$$

[i]，仮説，および 27.6 により，

$$\alpha``\{\text{e}\alpha`y\} = \text{e}\alpha``y,\ [\text{iv}] \qquad \alpha``\{\text{e}\alpha`z\} = \text{e}\alpha``z.\ [\text{v}]$$

27.4 と 23.8 により，$\breve{}\text{e}\alpha``\mho \subseteq \text{NO}$. それゆえ，[i] によって，$y, z \in \text{NO}$. したがって，23.23 により，

$$y \in z\,.\mathbf{v}.\,z \in y\,.\mathbf{v}.\,y = z. \qquad [\text{vi}]$$

$y \in z$ と仮定しよう．そのとき，[iii] により，$\text{e}\alpha`y \in \text{e}\alpha``z$. そこで，[v] により，$\text{e}\alpha`y \in \alpha``\{\text{e}\alpha`z\}$，すなわち，$\langle \text{e}\alpha`y, \text{e}\alpha`z\rangle \in \alpha$. だが，これは，[ii] と $\text{Ordg}\,\alpha$ という仮説と矛盾する．したがって，$y \notin z$. 同様に，$z \notin y$. それゆえ，[vi] により，$y=z$. しかるに，y と z は [ii] を満足する $\breve{}\text{e}\alpha``\mho$ の任意のメンバーであった．それゆえ，$\text{Func}\,\breve{}\text{e}\alpha$. したがって，(1) により，$\text{Cor}\,\text{e}\alpha$.

さて，われわれは，第4の希望条項: $\text{e}\alpha$ は順序を保存する，ということを証明する.

27.8　$\text{Ordg}\,\alpha\,.\,x, y \in \breve{}\text{e}\alpha``\mho\,.\supset:\langle \text{e}\alpha`x, \text{e}\alpha`y\rangle \in \alpha\,.\equiv.\,x \in y.$

証明. 第1の仮説と 27.7 により，$\text{Cor}\,\text{e}\alpha$. そこで，第2の仮説により，

$$(z)(\langle \mathrm{e}\alpha`x, z\rangle \in \mathrm{e}\alpha . \equiv . x = z). \tag{1}$$

仮説と 27.6 により，$\alpha``\{\mathrm{e}\alpha`y\} = \mathrm{e}\alpha``y$. それゆえ，

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{e}\alpha`x, \mathrm{e}\alpha`y\rangle \in \alpha . \equiv . \mathrm{e}\alpha`x \in \mathrm{e}\alpha``y & \\ \equiv (\exists z)(z \in y . \langle \mathrm{e}\alpha`x, z\rangle \in \mathrm{e}\alpha) & \\ \text{((1) により)} \quad \equiv (\exists z)(z \in y . x = z) & \\ \equiv . x \in y. & \end{aligned}$$

最後に，$\mathrm{e}\alpha$ の四つの望ましい性質のうちの残りのひとつ：その左域が α の全域である，ということをとりあげる．便宜上，その同一性を二つにわけて証明するであろう．

27.9 $$\mathrm{e}\alpha``\mho \subseteq (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho.$$

証明. 任意の $x \in \mathrm{e}\alpha``\mho$ を考えよう．$\langle x, y\rangle \in \mathrm{e}\alpha$ なるあるもの y がある．そのとき，27.2 と 25.2 により，次のようなあるもの w がある，

$$\langle x, y\rangle \in w, \quad [\mathrm{i}] \qquad (z)(z \in \breve{w}``\mho . \supset . \langle w`z, w\restriction z\rangle \in \Phi_\alpha), \quad [\mathrm{ii}]$$

そして，SEQ w，すなわち，

$$\mathrm{Func}\, w, \quad [\mathrm{iii}] \qquad \breve{w}``\mho \in \mathrm{NO} . \mathbf{v} . \breve{w}``\mho = \mathrm{NO}. \quad [\mathrm{iv}]$$

[i] と [iii] により，

$$y \in \breve{w}``\mho, \quad [\mathrm{v}] \qquad x = w`y. \quad [\mathrm{vi}]$$

[v]，[iv]，および 23.8 により，$y \in \mathrm{NO}$；さらに，[iii] により，$\mathrm{Func}\, w\restriction y$；ゆえに，23.15 により，

$$w\restriction y \in \mho. \tag{vii}$$

[v] と [ii] により，$\langle w`y, w\restriction y\rangle \in \Phi_\alpha$. すなわち，[vi] により，$\langle x, w\restriction y\rangle \in \Phi_\alpha$. すなわち，27.1 と [vii] により，

$$\alpha``\{x\} = (w\restriction y)``\mho, \qquad w\restriction y = \Lambda . \supset x 1 \alpha.$$

かくして，もし $w\restriction y = \Lambda$ ならば，$x \in \alpha``\mho$，そして，その他の場合には，$\alpha``\{x\} \neq \Lambda$，したがって，$x \in \breve{\alpha}``\mho$.

逆の包含には，いくつかの強い前提が要求される．

27.10 $$\mathrm{Wellord}\, \alpha . \breve{\ }\mathrm{e}\alpha``\mho \in \mho . (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \cap {}^{-}(\mathrm{e}\alpha``\mho) \in \mho \\ . \supset . \mathrm{e}\alpha``\mho = (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho.$$

証明のアイディア. われわれは27.9を有しているから，示される必要があるのは，$(\alpha\cup\breve{\alpha})``\mho\subseteq \mathrm{e}\alpha``\mho$ なること；すなわち，整列順序づけ α によって順序づけられるすべてのものは $\mathrm{e}\alpha``\mho$ のうちにある，ということだけである. $y$ を，$\alpha$ によって順序づけられるもののなかで，それより先のすべてのものが $\mathrm{e}\alpha``\mho$ のうちにあるような任意のものとしよう．そのとき，$y\in \mathrm{e}\alpha``\mho$ なることを，われわれは詳細に示す．$\alpha$ によって順序づけられるあらゆるものが $\mathrm{e}\alpha``\mho$ のうちにあることは，超限帰納法によって結果する.

証明の細部[2]. 最初の二つの仮説により，それぞれ，27.7と27.4によって，

$$\mathrm{Cor}\ \mathrm{e}\alpha,\quad (1)\qquad\qquad \breve{}\mathrm{e}\alpha``\mho\in\mathrm{NO}\quad (2)$$

がえられる．そこで，23.15により，

$$\mathrm{e}\alpha\in\mho. \tag{3}$$

第1の仮説と27.5により，$\mathrm{Func}\,\Phi_\alpha$. それゆえ，第2の仮説と26.6および定義27.2により，

$$\mathrm{e}\alpha\notin\breve{}\Phi_\alpha``\mho. \tag{4}$$

次のような任意のもの y を考えよう，

$$y\in(\alpha\cup\breve{\alpha})``\mho,\quad [\mathrm{i}]\qquad\qquad \alpha``\{y\}\subseteq\mathrm{e}\alpha``\mho.\quad [\mathrm{ii}]$$

[i] と21.7により，

$$\alpha``\{y\}=\Lambda\,.\supset y1\alpha. \qquad [\mathrm{iii}]$$

(4)と(3)により，$\langle y,\mathrm{e}\alpha\rangle\notin\Phi_\alpha$. それゆえ，27.1と(3)により，

$$\sim(\alpha``\{y\}=\mathrm{e}\alpha``\mho:\mathrm{e}\alpha=\Lambda\,.\supset y1\alpha),$$

すなわち，

$$\sim(\alpha``\{y\}=\mathrm{e}\alpha``\mho:\mathrm{e}\alpha``\mho=\Lambda\,.\supset y1\alpha),$$

すなわち，6.7により，

$$\sim(\alpha``\{y\}=\mathrm{e}\alpha``\mho:\alpha``\{y\}=\Lambda\,.\supset y1\alpha),$$

すなわち，[iii] により，$\alpha``\{y\}\neq\mathrm{e}\alpha``\mho$. そこで，[ii] により，次のような w がある，

$$w\in\mathrm{e}\alpha``\mho,\quad [\mathrm{iv}]\qquad\qquad \langle w,y\rangle\notin\alpha.\quad [\mathrm{v}]$$

[iv] と(1)により，次のような x がある，

$$x\in\breve{}\mathrm{e}\alpha``\mho,\quad [\mathrm{vi}]\qquad\qquad w=\mathrm{e}\alpha`x.\quad [\mathrm{vii}]$$

2 Joseph Ullian によって大幅に短縮された.

[vi] と第1の仮説から，27.6 によって，$\alpha``\{\mathrm{e}\alpha`x\}=\mathrm{e}\alpha``x$ がえられる．すなわち，[vii] によって，$\alpha``\{w\}=\mathrm{e}\alpha``x$. したがって，

$$\alpha``\{w\} \subseteq \mathrm{e}\alpha``\mho. \qquad [\mathrm{viii}]$$

[iv] と 27.9 により，$w \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho$；また，第1の仮説により，Connex $\alpha$；それゆえ，[i] と [v] により，$w=y$ または $\langle y, w\rangle \in \alpha$. したがって，一方の場合には，[iv] によって，他方の場合には [viii] によって，$y \in \mathrm{e}\alpha``\mho$. しかるに，$y$ は [i] と [ii] を満足する任意のものであった．それゆえ，

$$(y)(\alpha``\{y\} \subseteq \mathrm{e}\alpha``\mho \,.\, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\supset.\, y \in \mathrm{e}\alpha``\mho),$$

すなわち，

$$(y)((z)(\langle z, y\rangle \in \alpha \,.\supset.\, z \in \mathrm{e}\alpha``\mho) \,.\, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho \,.\supset.\, y \in \mathrm{e}\alpha``\mho).$$

これと仮説から，20.6 に従う超限帰納法によって，任意の $w \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho$ に対して，$w \in \mathrm{e}\alpha``\mho$. それゆえ，27.9 によって，$(\alpha \cup \breve{\alpha})``\mho=\mathrm{e}\alpha``\mho$.

そこで，いまや，枚挙定理は 27.4, 27.7, 27.8 および 27.10 を含むところの散在した形で手中にある．

枚挙定理から，任意の二つの整列順序づけは，§21 の意味で，比較可能である，ことが証明できる．Wellord x かつ Wellord y である場合，$\mathrm{e}x|\breve{\ }\mathrm{e}y$ は(もしそれが存在するならば) x と y とのあいだの，あるいは x と y の切片とのあいだの，あるいは，x の切片と y とのあいだの同型対応であることを示すことができる．もっと簡単には，整列順序づけ x と y とは，それぞれの順序数 $\breve{\ }\mathrm{e}x``\mho$ と $\breve{\ }\mathrm{e}y``\mho$ とを比較することによって比較できる．順序数自体の比較可能性は 23.23 に戻る．

IX. カーディナル数

28. クラスのサイズの比較

われわれは，11.1 で，クラスが他のクラスより大きいか大きくないかをどのようにして比較するか，を見た．そのような比較を支配するいくつかの簡単な法則はすぐに証明される．

28.1 $$\alpha \subseteq \beta \preceq \gamma \,.\supset.\, \alpha \preceq \gamma.$$

証明．仮説と 11.1 により，$\alpha \subseteq \beta \subseteq x``\gamma$ なる関数 x が存在する，これから，11.1 により，$\alpha \preceq \gamma$.

28.2 $$\alpha \preceq \beta \subseteq \gamma \,.\supset.\, \alpha \preceq \gamma.$$ **証明**は同様に容易．

28.3 $$\Lambda \preceq \alpha.$$

証明．Func Λ かつ $\Lambda \subseteq \Lambda``\alpha$.

28.4 $$\{x\} \preceq \{y\}.$$

証明．Func $\{\langle x, y\rangle\}$ かつ $\{x\} \subseteq \{\langle x, y\rangle\}``\{y\}$.

28.5 $$\alpha \preceq \{x\} \,.\equiv:\, \alpha = \Lambda \,.\vee\, (\exists y)(\alpha = \{y\}).$$

証明．もし $\alpha \preceq \{x\}$ ならば，11.1 により，ある関数 z に対して $\alpha \subseteq z``\{x\}$，したがって，10.17 により，$\alpha \subseteq \{z`x\}$，それゆえ，$\alpha$ は $\Lambda$ か，もしくは $\{z`x\}$ である．逆は 28.3 と 28.4 による．

だが，包括化前提なしにこの論題について証明できる事柄は，限界がすぐくる．「$\alpha \preceq \alpha$」さえもわれわれの範囲を超えている．それは，ある関数 x に対して $\alpha \subseteq x``\alpha$ を意味する；そして，$I \in \mathfrak{V}$，もしくは $I{\restriction}\alpha \in \mathfrak{V}$ を，あるいは，ともかく；$I{\restriction}\alpha \subseteq x \subseteq I$ が結果するようなあるもの x が介在することを含意するところの包括化前提をおかなければ，関数 I，もしくは関数 $I{\restriction}\alpha$ を引用してこれを証明することはできない．これら慎重な言明のひとつに番号を与えよう．

28.6 $$I{\restriction}\alpha \in \mathfrak{V} \,.\supset.\, \alpha \preceq \alpha.$$

証明は，$\alpha = (I{\restriction}\alpha)``\alpha$ なので，11.1 による．

推移性もまた包括化前提を必要とする．もし $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$ なら，11.1 によって，$\alpha \subseteq x``\beta$ か

つ $\beta\subseteq y``\gamma$，したがって，$\alpha\subseteq(x|y)``\gamma$ なる関数 x および y が存在する；そして，さらに，10.6 により，たしかに，Func $x|y$. だが，$x|y\in\mathcal{V}$ でなければ，これは，$\alpha\preceq\gamma$ であるという証明ではない.

これらの障害は有限のケースではおきない．α について，ある x に対して $\alpha\preceq\{,,,x\}$ を示しうるかぎりでは，現在の穏当な包括化公理を利用して，Func β なるときにはいつでも $\beta``\alpha\preceq\alpha$ である，ことを証明することができる；ここでは，われわれは「$\beta\in\mathcal{V}$」を無視できるのである.

28.7 $$\alpha\preceq\{,,,x\}\,.\,\mathrm{Func}\,\beta\,.\supset.\,\beta``\alpha\preceq\alpha.$$

証明. 最初の仮説と 11.1 により，

$$\mathrm{Func}\,y,\ (1)\qquad\qquad \alpha\subseteq y``\{,,,x\}\quad (2)$$

なる y が存在する.

$$\gamma=\{\langle\langle u,v\rangle,w\rangle:\langle u,v\rangle\in\beta\,.\,\langle v,w\rangle\in y\}\qquad (3)$$

とする．仮説により，Func β. したがって，(1) と (3) により，Func γ. したがって，13.1 により，次のようなあるもの z が存在する，

$$\begin{aligned} z&=\gamma``\{,,,x\}\\ &=\{\langle u,v\rangle:\langle u,v\rangle\in\beta\,.\,v\in y``\{,,,x\}\} &&\text{((3)により)}\\ &=\beta\restriction(y``\{,,,x\}). &&(4)\end{aligned}$$

このとき，(2) により，$z``\alpha=\beta``\alpha$. さらに，Func β なので，Func z. それゆえ，11.1 により，$\beta``\alpha\preceq\alpha$.

そこで，28.6 に貧弱な補足をつけ加えることができる：

28.8 $$\alpha\preceq\{,,,x\}\,.\supset.\,\alpha\preceq\alpha.$$

証明. 28.7 の β を I にとる.

推移性に対しても同様.

28.9 $$\alpha\preceq\beta\preceq\gamma\preceq\{,,,x\}\,.\supset.\,\alpha\preceq\gamma.$$

証明. いましがた注意したように，仮説により，Func $y|z$ かつ $\alpha\subseteq(y|z)``\gamma$ なる $y$ と $z$ が存在する．最後の仮説と 28.7 により，$(y|z)``\gamma\preceq\gamma$. したがって，28.1 により，$\alpha\preceq\gamma$.

そうよばれてもよいと思うが，α の**堅固な有限性** (*firm finitude*) の条件というのは：

$$(\exists x)(x\in\mathrm{N}\,.\,\alpha\preceq\{,,,x\})$$

である．対照的に，「$(\exists x)(\alpha \preceq \{,,,x\})$」だけは，**暫定的**(*provisional*)有限性の条件とよんでよい．というのは，もし循環しない単一のメンバーの際限のない下降がありうるならば，これは α の無限性と両立可能だからである；13.1 の前の議論を参照．だが，暫定的有限性は，議論領域にそのばかげた奇妙な性質を許さなければ，たしかに有限性を保証している．これだけの保証で，28.8 と 28.9 に対しては十分であったし，「$\alpha \preceq \alpha$」および「$\alpha \preceq \beta \preceq \gamma . \supset . \alpha \preceq \gamma$」のように，さもなければ包括化前提を要したでもあろうようなクラスの比較の他の多くの法則に対しても，おなじように，十分なのである．暫定的有限性がこのように包括化前提にとって代ることができる理由というのは，単に，暫定的有限性が次の包括化〔言明〕型の条件である，ということにすぎないからである．

28.10 $\alpha \preceq \{,,,x\} . \supset . \alpha \in \mathfrak{V}$. **証明**は 13.2, 11.1 による．

暫定的有限性ということの項目に含めて，以後の参照のために，ちょうどもう三つの法則をここに記すことにしたい．

28.11 $\{,,,x\} \preceq \{,,,x\}$.

証明．13.4 により，$\breve{}(I \restriction \{,,,x\})``\mathfrak{V}$ は $\{,,,x\}$ なので，$I \restriction \{,,,x\} \in \mathfrak{V}$．したがって，28.6 により，$\{,,,x\} \preceq \{,,,x\}$.

28.12 $\alpha \preceq \beta \preceq \{,,,x\} . \supset . \alpha \preceq \{,,,x\}$.

証明．γ を $\{,,,x\}$ として，28.9 と 28.11.

28.13 $\alpha \preceq \{,,,\{x\}\} . \supset (\exists y)(\alpha \cap {}^{-}\{y\} \preceq \{,,,x\})$.

証明．仮説と 11.1 により，

$$\text{Func}\, z, \quad (1) \qquad \alpha \subseteq z``\{,,,\{x\}\} \quad (2)$$

なる z がある．(2) と 13.13 により，

$$\alpha \subseteq z``\{,,,x\} \cup z``\{\{x\}\}.$$

しかるに，(1) と 10.17 により，ある y に対して，$z``\{\{x\}\} \subseteq \{y\}$．したがって，

$$\alpha \subseteq z``\{,,,x\} \cup \{y\}.$$

それゆえ，

$$\alpha \cap {}^{-}\{y\} \subseteq z``\{,,,x\}.$$

したがって，(1) と 11.1 により，$\alpha \cap {}^{-}\{y\} \preceq \{,,,x\}$.

暫定的有限性の前提に基づくクラス比較の法則のほかに，堅固な有限性を必要とする法則がある．この必要が生じる典型的な場合は，その法則が数学的帰納法によって証明されるときである．数学的帰納法は，数のかわりに，堅固に有限なクラスに直接的に適用できる，かくして：もし $F\Lambda$，かつ，すべての y と z に対して，$F(y \cap {}^{-}\{z\}) \supset Fy$ で，α が堅固に有限であるならば，$F\alpha$.

28.14 $F\Lambda \,.\, (y)(z)(F(y \cap {}^{-}\{z\}) \supset Fy) \,.\, x \in \mathrm{N} \,.\, \alpha \preceq \{,,,x\} \,.\!\supset F\alpha.$

証明.

$$(v)(v \preceq \{,,,w\} \,.\!\supset Fv), \quad [\mathrm{i}] \qquad\qquad y \preceq \{,,,\{w\}\} \quad [\mathrm{ii}]$$

なる任意の y と w を考えよう．[ii] と 28.13 により，$y \cap {}^{-}\{z\} \preceq \{,,,w\}$ なるあるもの z が存在する．したがって，28.10 により，$y \cap {}^{-}\{z\}$ は $v \preceq \{,,,w\}$ なるあるもの v である．そこで，[i] により，$F(y \cap {}^{-}\{z\})$．したがって，第 2 の仮説により，Fy．しかるに，y と w は [i] と [ii] を満足する任意のものであった．それゆえ，

$$(w)((v)(v \preceq \{,,,w\} \,.\!\supset Fv) \supset (v)(v \preceq \{,,,\{w\}\} \,.\!\supset Fv)). \tag{1}$$

仮説により，$F\Lambda$．ゆえに，任意の u に対して，$F(\{u\} \cap {}^{-}\{u\})$．しかるに，そのとき，第 2 の仮説により，$F\{u\}$．12.21 により，

$$(v)(v \preceq \{,,,\Lambda\} \,.\!\supset\!.\, v \preceq \{\Lambda\})$$

(28.5 により) $\qquad \supset\colon v = \Lambda \,.\mathbf{v}\, (\exists u)(v = \{u\}))$

($F\Lambda$ かつ $F\{u\}$ なので) $\qquad \supset Fv).$

これと (1) および仮説「$x \in \mathrm{N}$」とから，13.9 に従う帰納法によって，

$$(v)(v \preceq \{,,,x\} \,.\!\supset Fv)$$

となる．しかるに，最後の仮説と 28.10 により，α は $v \preceq \{,,,x\}$ なるあるもの v である．したがって，$F\alpha$.

帰納法のこの表現から，N を使うかわりに，まさしく N の定義にならうことによって，堅固な有限性そのものをより直接的に定義できるはずだ，ということに，実際，思いつく．クラス u は，もしそれが $\Lambda \in w$，かつ，

$$(y)(z)(y \cap {}^{-}\{z\} \in w \,.\!\supset\!.\, y \in w)^1$$

なるあらゆるクラスに属するならば，有限である．あるいは，無限の w に依存するのを

1 Whitehead and Russell, *120-24 も同様.

避けるためにNの場合にそうしたように，反転して，むしろ，もし，$u \in w$ でかつ

$$(y)(z)(y \in w . \supset . y \cap {}^{-}\{z\} \in w)$$

であるようなあらゆるクラス w に，Λ が属するならば，u は有限である，といってもよい.

帰納法の表現28.14は，13.10に対応して，より長く，より強い変形を認める.

28.15 $F\Lambda . (y)(z)(y \preceq \{,,,x\} . F(y \cap {}^{-}\{z\}) . \supset Fy) . x \in \mathrm{N} . \alpha \preceq \{,,,x\} . \supset F\alpha.$

証明. 28.1により，

$$y \preceq \{,,,x\} . \supset . y \cap {}^{-}\{z\} \preceq \{,,,x\}.$$

それゆえ，もし，さらに，

$$y \cap {}^{-}\{z\} \preceq \{,,,x\} . \supset F(y \cap {}^{-}\{z\})$$

ならば，

$$y \preceq \{,,,x\} . \supset F(y \cap {}^{-}\{z\})$$

と，また，それから，

$$y \preceq \{,,,x\} . \supset . y \preceq \{,,,x\} . F(y \cap {}^{-}\{z\})$$

(第2の仮説により) $\qquad \supset Fy$

とが結果する．要約すると，

$$(y)(z)(y \cap {}^{-}\{z\} \preceq \{,,,x\} . \supset F(y \cap {}^{-}\{z\}) : \supset : y \preceq \{,,,x\} . \supset Fy).$$

最初の仮説により，$\Lambda \preceq \{,,,x\} . \supset F\Lambda$. これら二つの結果と最後の二つの仮説とにより，28.14に従う帰納法によって，$\alpha \preceq \{,,,x\} . \supset F\alpha$ が結果する．したがって，最後の仮説により，$F\alpha$.

このような帰納法によって証明できるひとつの典型的な法則は：

(i) $\qquad x \in \mathrm{N} . \alpha \cup \{y\} \preceq \alpha \preceq \{,,,x\} . \supset . y \in \alpha$

であるが，これは，もし y が α の中になければ，堅固に有限な α が $\alpha \cup \{y\}$ より小でなければならないことを意味する．他の法則は：

(ii) $\qquad x \in \mathrm{N} . \alpha \preceq \{,,,x\} . \alpha \preceq \beta . \supset (\exists x)(\alpha \simeq x \subseteq \beta)$

であるが，これは，もし $\alpha \preceq \beta$ ならば，堅固に有限な α が β のある部分クラスとおなじサイズでなければならないことを意味する．証明は省略する．有限クラスに関する平凡な

定理の長い帰納的な証明を見たいと思う読者は，そのかわりに，31.3 に向うとよい；そして，そのような読者は練習に (i) と (ii) をやってみるのがよかろう．

暫定的有限性から証明された諸法則は，ある穏当な包括化前提を仮定すれば，一般に無限クラスに対しても成りたつ，というのは，暫定的有限性それ自身が一般に 13.1 を通してのみ作用するからである．事実，28.7—28.12 は，順序数に関係し 13.1 のかわりに 23.12 に基づく類似の式を有している，かくして：

$$\alpha \preceq x \in \mathrm{NO} \,.\, \mathrm{Func}\,\beta \,.\supset.\, \beta``\alpha \preceq \alpha,$$
$$\alpha \preceq x \in \mathrm{NO} \,.\supset.\, \alpha \preceq \alpha,$$
$$\alpha \preceq \beta \preceq \gamma \preceq x \in \mathrm{NO} \,.\supset.\, \alpha \preceq \gamma,$$
$$\alpha \preceq x \in \mathrm{NO} \,.\supset.\, \alpha \in \mho,$$
$$x \in \mathrm{NO} \,.\supset.\, x \preceq x,$$
$$\alpha \preceq \beta \preceq x \in \mathrm{NO} \,.\supset.\, \alpha \preceq x.$$

証明は，13.1, 13.2 および 13.4 のかわりに 23.12, 23.13 および 23.15 を引用しさえすれば，28.7—28.12 の証明からえられる．

他方，堅固な有限性から帰納法によって証明される諸法則は，無限のケースでは——単に証明できないというだけではなく——ときには偽であるということが分る．(i)の情況はそのようなものである；二・三ページ先で，無限クラスのサイズ比較に関する奇妙な点を調べはじめると明らかになるように，「$\alpha \cup \{y\} \preceq \alpha \,.\supset.\, y \in \alpha$」は無限の α に対しては成りたたない．だが，(ii)ではもうひとつの情況が例示されている：たぶん，(ii)はそれが堅固に有限であるという前提なしに成りたつであろうが，無限のケースに対するその証明は，包括化とは違った形の特別な前提を要求する，そして，その前提には，次章において，われわれは選択公理の名の下で出会うであろう．

カントール以前には，無限の多を大・小の点で有意味に比較できる，ということは明らかでなかった．α がただ有限に多くのメンバーを有するときは，勝手な順序でそれらを β のメンバーにひとつずつ割りあて，そして，もし β が全部つきても，なお α のあるメンバーが残っているならば，α は β よりも多くのメンバーをもっていると結論される．(あるいは，数える場合のように，α のメンバーに数を割りあて，β にも同様にして，後で比較してもよい.) だが，クラスが無限であるときには，そのような比較が意味を失っていることを示唆している奇妙な変形がいくつか観察されはじめる．そこで，われわれが無限に多くの自然数を無限に多くの偶数に割りあてようと試みている，と仮定しよう．ひとつの

方法，つまり，おのおのの数をそれと等しいものに割りあてるという方法は，奇数を残し，かくして，全体では偶数よりも多くの数があったことを暗に示している；だが，数 x のおのおのを $x+x$ に割りあてるという別の方法は，全部を片づけてしまい，かくして，全体では偶数より多くの数はなかったことを暗示している．

カントールは，α のすべてのメンバーを β のメンバーに割りあてるある関数が存在するかぎり，α は β より大きくないと宣言して，そのようなディレンマを解決した．11.1 以来われわれの前にあった定義がそれである．これを固守すれば，N と偶数のクラスとをどのようにして比較するかという上の問題は解決する．(x を $x+x$ に割りあてる)好都合な関数のおかげで，不都合な関数(同一性)にもかかわらず，N は偶数のクラスより大きくはない，と見なされるのである．

ともかく，もし引用された関数が存在するならば，すなわち，

$$\{\langle x, x+x\rangle : x \in \mathrm{N}\} \in \mathcal{V}$$

ならば，これで問題は解決する．かくして，無限クラスの比較は，11.1 の関数に対する量化された変項のために，一般に包括化前提に依存するであろう．

カントールの基準を有意味にしているのは，N-対-偶数のクラス の場合ではないが，いくつかのケースでは，その基準が，サイズの相違を記録し，あるクラスが N よりも多くのメンバーをもつことを(一般に受けいれられている包括化前提に基づいて)示している，ということである．カントールは，たとえば，彼の基準の下では実数が自然数よりも多い，ことを確立した．すなわち，$\mathrm{N} \prec \mathrm{Real}$.

再度 §17 の図表について考え，そして，斜線としての実数について考えてみれば，その真意がただちに理解されよう．x が任意の関数であるとき，斜線 $r \notin x``\mathrm{N}$ は，次のようにして，無限の近似によって特定化できる．斜線 $x`0$ が $\langle 0, 0\rangle$ における直角の下半分になければ，$r$ は $\langle 0, 0\rangle$ における直角の下半分になければならず，$x`0$ が下半分にある場合には，r はその上半分になければならない．r がどちらの半分にあるにせよ，斜線 $x`1$ がその半分の下半分になければ，$r$ はその半分の下半分になければならず，$x`1$ が半分の下半分にある場合には，r はその直角のその半分の他の半分の中になければならない．r がどの四半分の中にあるにせよ，$x`2$ がその四半分の下半分になければ，$r$ はその四半分の下半分になければならない；等々．したがって，$r$ はおのおのの $y \in \mathrm{N}$ に対して $x`y$ とは異なる．それゆえ，$\mathrm{Real} \not\subseteq x``\mathrm{N}$. しかるに，$x$ は任意の関数であった．したがって，定義 11.1 および 20.3 により，$\mathrm{N} \prec \mathrm{Real}$.

N$\prec$Real に驚く人は，たぶん，ないであろう，というのは，おのおのの整数とその次の整数とのあいだには無限に多くの実数が存在するからである．だが，これは，驚かないということに対する正当な理由にはならない；なぜなら，おなじ理由から，誤まってN$\prec$Rat と想定するに至るでもあろうからである．現に，われわれは，すべての有理数を自然数に割りあてる関数，すなわち，§3 で言及された，$\langle y/z,\ 2^y\cdot 3^z\rangle$ という形のすべての対から成る関数をたしかにもっている．

この最後の注意は，再び，包括化前提を条件としている：

$$\{\langle y/z,\ 2^y\cdot 3^z\rangle : y, z\in \mathrm{N}\}\in \mho.$$

この仮定に基づいてのみ，この関数を引用して，Rat$\preceq$N が示されるのである．

ギャップといえば，N$\prec$Real という前の議論には，もちろん，いろいろなギャップがある．厳密に示せば，その議論は $\frac{1}{2}$ の巾乗の和を算術的に取り扱おうとしていた．実数 r は，$\frac{1}{2}$ の巾乗の和の適当なクラスの最小上界としてえられるでもあろうし，また，われわれの議論はそのクラスの存在を肯定する包括化前提に依存するでもあろう．しかしながら，クラス N より大きいクラスが存在することを示すのに，「N$\prec$Real」という例を必要とはしない，といえるのはうれしい．もうひとつの例に転ずることができるが，これもまたカントールに負うもので，それは，より一般的であるという長所と，古典的算術をこれ以上展開しないですむという長所とを結びつけている．

なぜなら，カントールは，N$\prec\{x: x\subseteq \mathrm{N}\}$ を，より一般的には，$\alpha\prec\{x: x\subseteq\alpha\}$ を，すなわち，いかなるクラスもそのメンバーより多くの部分クラスを有する，ということを示したからである．われわれにとっては，この定理型は包括化前提を必要とする．別個に参照する便宜のため，まず，次の補助定理を証明する：

28.16 $\alpha\cap\{y: y\notin\beta`y\}\in\mho\,.\,\mathrm{Func}\,\beta\,.\supset:\{x: x\subseteq\alpha\}\nsubseteq\beta``\alpha.$

証明．最初の仮説により，

$$w=\{y: y\in\alpha\,.\,y\notin\beta`y\} \qquad (1)$$

なるあるもの w が存在する．すると，

$$(y)(y\in\alpha\,.\supset: y\in w\,.\equiv.\,y\notin\beta`y)$$

$$\supset.\,w\neq\beta`y)$$

(第2の仮説により) $\supset.\,\langle w, y\rangle\notin\beta).$

すなわち，$w \notin \beta``\alpha$. しかるに，(1)により，$w \subseteq \alpha$. したがって，$\{x: x \subseteq \alpha\} \not\subseteq \beta``\alpha$.

さて，カントールの法則，ただし，包括化前提を伴なう.

28.17 $$(w)(\alpha \cap \{y: y \notin w`y\} \in \mho) \supset . \alpha \prec \{x: x \subseteq \alpha\}.$$

証明. 28.16と仮説により，

$$(w)(\mathrm{Func}\, w \supset . \{x: x \subseteq \alpha\} \not\subseteq w``\alpha).$$

すなわち，11.1と20.3により，$\alpha \prec \{x: x \subseteq \alpha\}$.

この法則によれば，ただひとつの無限のサイズがあるどころではなく，包括化の仮定が不足するときを除けば，無限のサイズには際限がない.

しかしながら，カントールの法則をその包括化前提から引き離さないように気をつけねばならない．包括化前提を有するいくつかの定理のうちには，これらの前提をとり去っても納得のゆくように考えることのできるものもある，なぜなら，これらの前提は，一般的な，あるいは典型的な場合には，われわれがおそらく設定するであろうどの一群の包括化公理によっても，結局のところ，支持されるような前提だからである．しかし，カントールの法則は，包括化できないために成りたたない場合を除くと，ただちに逆理に陥いる．無制限な「$\alpha \prec \{x: x \subseteq \alpha\}$」は，「$\mho \prec \{x: x \subseteq \mho\}$」を，簡単には，「$\mho \prec \mho$」を与えるが，これはカントールの逆理として知られているものである.

28.18 $$(w)(\{y: y \notin w`y\} \in \mho) \supset . \mho \prec \mho.$$

証明. 28.17のαに$\mho$をとる.

ラッセルが初めて彼の有名でもっと簡単な逆理に出会ったのは，事実，この径路によってであった[2]. その関連を明らかにするために，28.16に戻り，28.17においてするかわりに，そこでαを$\mho$にとろう．明らかな還元によって，

28.19 $$\{y: y \notin \beta`y\} \in \mho . \mathrm{Func}\, \beta . \supset . \beta``\mho \neq \mho$$

がえられる．さて，（包括化前提を別にすれば，）これについて逆理的な点というのは，それに反してあきらかに Func I かつ $I``\mho = \mho$ だ，ということである．しかし，βをIととると，包括化前提「$\{y: y \notin \beta`y\} \in \mho$」自体は「$\{y: y \notin y\} \in \mho$」となるが，これが偽であることはラッセルの逆理からよく知られている.

αを$\mho$にとることによって28.16から生ずる系28.19と並んで，むしろ，βをIにとっ

2 *Principles*, 101ページ，362ページを参照.

て生ずる系もまた記録しておく価値がある：

28.20　$\alpha \cap \{y : y \notin y\} \in \mho \,.\supset.\, \{x : x \subseteq \alpha\} \notin \alpha.$

ここで，α を $\mho$ にとれば，後件は偽「$\mho \not\subseteq \mho$」に変じ，また前件も偽「$\{y : y \notin y\} \in \mho$」に変ずる．

「$\mho \prec \mho$」自体は偽とみなされるべきではない．もしわれわれの包括化の仮定を，$I \notin \mho$，より一般的には，

$$\sim(\exists x)(\text{Func}\, x \,.\, x``\mho = \mho)$$

というように組みあげるならば，それによって，われわれは「$\mho \prec \mho$」を真とみなしている，そして，28.18 の包括化前提をも真として採用することさえ自由となる．

29. シュレーダー–ベルンシュタインの定理

「$\preceq$」および「$\simeq$」を規制しようとしている法則の網の中から，「$\alpha \preceq \beta$」と「$\alpha \simeq \beta$」とを定義するのに，

(i)　$\alpha \preceq \beta \,.\!\equiv (\exists x)(\text{Func}\, x \,.\, \alpha \subseteq x``\beta),$

(ii)　$\alpha \simeq \beta \,.\!\equiv.\, \alpha \preceq \beta \preceq \alpha$

以外のものをわれわれは選んでもよかった．定義のためには，(i) において「$\subseteq$」のかわりに「$=$」を用い，それから，包括化前提を条件として，現にある形の (i) を，むしろ，定理型として導出してもよかった．あるいは，もっと大幅にそれて，「$\alpha \simeq \beta$」を，むしろ：

(iii)　$(\exists x)(\text{Cor}\, x \,.\, \alpha \subseteq x``\beta \,.\, \beta \subseteq \breve{x}``\alpha),$

(iv)　$(\exists x)(\text{Cor}\, x \,.\, \alpha = x``\beta \,.\, \beta = \breve{x}``\alpha),$

(v)　$(\exists x)(\text{Cor}\, x \,.\, \alpha = x``\mho \,.\, \beta = \breve{x}``\mho)$

のうちのどれかとして定義し，それから，「$\alpha \preceq \beta$」を「$(\exists y)(\alpha \simeq y \subseteq \beta)$」として定義しても，あるいは，「$\simeq$」とは独立に，「$\alpha \preceq \beta$」を，

(vi)　$(\exists x)(\text{Cor}\, x \,.\, \alpha \subseteq x``\beta),$

(vii)　$(\exists x)(\text{Cor}\, x \,.\, \alpha = x``\beta)$

のどちらかとしてさえ定義してもよかった．これらの定義すべてに対応する等値関係は定理として要求されるが，私が出発点として (i) と (ii) を選んだのには，他のアプローチの下

では要求されたでもあろうような手のこんだ包括化前提を初期の段階で要求しないですむという利点があったのである.

われわれがいるのは，証明さるべき法則というのが見た目には取るに足りないと思われるにもかかわらず，その証明が急に難かしくなり，包括化前提に対する要求が途方もないものとなるような領域なのである．そこで，(ii)の「$\simeq$」と「$\preceq$」を(iii)および(vi)に従って解釈しなおしたものとしよう．その結果，(iii)は：

(viii) $$(\exists x)(\mathrm{Cor}\ x\,.\,\alpha \subseteq x``\beta)\,.\,(\exists x)(\mathrm{Cor}\ x\,.\,\beta \subseteq x``\alpha)$$

に等しくなる．あきらかに，(iii)は，$(x)(\breve{x} \in \mho)$ を仮定すれば，(viii)を含意する．だが，(viii)が(iii)を含意することには多くの証明と重要な包括化前提とが必要である．それは，**シュレーダー–ベルンシュタインの定理**(*Schröder–Bernstein theorem*)とよばれる.

(viii)をそのまま，あるいは「$\subseteq$」を「$=$」に強めて((vii)参照)前件とし，そして，(iii)，あるいは(iv)，あるいは(v)を後件にとっても，定理としてはほとんどおなじである．私は，もっとも都合のわるい組み合わせ：(viii)を前件，(v)を後件とする組み合わせをとろう．(あきらかに，包括化前提がなくても，(v)は(iv)を含意し，かつ，(iv)は(iii)を含意する.)

ここでは，簡潔にするため，包括化前提のうちに，厳密に必要とされるよりは一般的であるが，別種の魅力的な集合論と衝突しそうなほど一般的ではないものを受けいれることにする．かくして，私は，多くの集合論で仮定されてはいるが，ある集合論とは矛盾する「$(x)(y)(x \cup y \in \mho)$」を避ける；あるクラスにはより小さいクラスにのみ属することが許されているような集合論とは，それは矛盾する(§§ 7, 44 参照).

次の略記法が包括化前提において用いられることとなろう.

29.1 「C_1」は「$(x)(y)(x \cap \bar{y}, \breve{x}, x``\mho, x{\restriction}y \in \mho)$」を表わし，

29.2 「C_2」は「$(x)(y)(x|y, {}^{-}({}^{*}x``\bar{y}) \in \mho :$
$(x \cup y)``\mho, {}^{\smile}(x \cup y)``\mho \in \mho \,.\supset.\, {}^{\cdot}x \cup {}^{\cdot}y \in \mho)$」[1] を表わす.

「C_1」については，次のことが注目されねばならない.

29.3 $$C_1 \supset (x)(y)(x \cap y, x``y \in \mho).$$

証明. 「C_1」により，$x \cap \bar{y} \in \mho$，それゆえ，再び「C_1」により，$x \cap {}^{-}(x \cap \bar{y}) \in \mho$，す

1 もしこの ${}^{-}({}^{*}x``\bar{y})$ がとっぴに思えるなら，それが，15.2 によってつねに y の部分クラスであることに注意されたい.

なわち，$x \cap y \in \mho$. さらに，「C_1」により，$x \upharpoonright y \in \mho$，それゆえ，再び，「$C_1$」により，$(x \upharpoonright y)``\mho \in \mho$，すなわち，$x``y \in \mho$.

そして，シュレーダー--ベルンシュタインの定理は次の通りである．私は，(viii) と (v) の「α」と「β」を「y」と「z」に抑えたので，より以上の存在を仮定している．

29.4 $$C_1 . C_2 . (\exists x)(\mathrm{Cor}\, x . y \subseteq x``z) . (\exists x)(\mathrm{Cor}\, x . z \subseteq x``y)$$
$$. \supset (\exists x)(\mathrm{Cor}\, x . y = x``\mho . z = \breve{x}``\mho).$$

証明のアイデイア[2]. 仮説により，$y \subseteq x``z$ なる 1-1 対応 $x$ がある．それを左右切りかえて切りつめると，$y = \breve{u}``\mho$ かつ $u``\mho \subseteq z$ なる 1-1 対応 $u$ をうる．他の仮説により，同様に，$z = \breve{v}``\mho$ かつ $v``\mho \subseteq y$ なる 1-1 対応 $v$ がある．かくして，$v|u$ は，$y$ のメンバーのあるものが $y$ のメンバーのひとつひとつに対してもっている関係である．とはいうものの，しかし，$y$ の与えられたメンバーが，こんどは，$v$ をもっているとはかぎらないと考えられる；それが $v``\mho$ の範囲に入らないこともありうるのである．$v|u$ のステップによって $v``\mho$ の外に出ることがないような y のメンバーだけから成るクラスを w としよう．さて，次のように新しい関係を定義しよう：w のメンバーが v をもっているすべてのものに対しては，w のメンバーがこの関係をもっているのに反して，w のメンバー以外のものが $\breve{u}$ をもっているすべてのものに対しては，w のメンバー以外のものがこの関係をもっている．この関係は，結局，その左域と右域が y と z であるような 1-1 対応であることが詳細に示される．

証明の細部. 仮説により，$y \subseteq x``z$ なる 1-1 対応 $x$ がある．だが，このとき，$y$ のメンバーは，(Cor $x$ なので) $z$ のメンバー以外のいかなるものに対しても $x$ をもたない；すなわち，$\breve{x}``y \subseteq z$.「$C_1$」により，$u = \breve{x} \upharpoonright y$ なるあるもの u がある．Cor x および $y \subseteq x``z$ かつ $\breve{x}``y \subseteq z$ なので，

$$\mathrm{Cor}\, u, \quad (1) \qquad y = \breve{u}``\mho, \quad (2) \qquad u``\mho \subseteq z \quad (3)$$

となる．最後の仮説により，同様に，

$$\mathrm{Cor}\, v, \quad (4) \qquad z = \breve{v}``\mho, \quad (5) \qquad v``\mho \subseteq y \quad (6)$$

なるある v が保証される．「C_2」により，$v|u \in \mho$. また，「C_1」により，$v``\mho \in \mho$. した

2 この証明の一般的なアイディアは，1906 年，König, Peano, および Zermelo によって，独立に提出された．初期の証明——その中のひとつは誤まりであったが——は 1898 年にさかのぼる．Fraenkel, *Einleitung*, 75 ページ以下を見よ．また，Zermelo の 1908 年の論文の註 9 を見よ．

がって,「C_2」により,

$$w = {}^{-}({}^{*}(v|u)``{}^{-}(v``\mho)) \quad (7)$$

$$= \{h : (k)(\langle h, k\rangle \in {}^{*}(v|u) . \supset . k \in v``\mho)\} \quad (8)$$

なるあるもの w がある. 15.2により, 任意のもの h は自分自身に対して任意の祖先関係をもつ. したがって, (8)により, もし $h \in w$ ならば, $h \in v``\mho$. それゆえ,

$$w \subseteq v``\mho. \quad (9)$$

15.5により,

$$(v|u)``({}^{*}(v|u)``{}^{-}(v``\mho)) \subseteq {}^{*}(v|u)``{}^{-}(v{}^{*}\mho).$$

すなわち, (7)により, $(v|u)``\bar{w} \subseteq \bar{w}$. すなわち, $v``(u``\bar{w}) \subseteq \bar{w}$. すなわち, $w$ のどのメンバーも $u``\bar{w}$ のメンバーに対して v をもたない. すなわち,

$$\breve{v}``w \cap u``\bar{w} = \Lambda. \quad (10)$$

「C_1」をくりかえし使って, $\breve{u} \in \mho$ を, かくして, $\breve{u}``\mho \in \mho$ を, かくして, $\breve{u}``\mho \cap \bar{w} \in \mho$ を, かくして, $u \restriction (\breve{u}``\mho \cap \bar{w}) \in \mho$ をつぎつぎとうるが, これは $u \restriction \bar{w} \in \mho$ を意味する. また,「C_1」から, より容易に, $\breve{v} \restriction w \in \mho$ をうる. それゆえ,

$$r = \breve{v} \restriction w, \quad (11) \qquad s = u \restriction \bar{w} \quad (12)$$

なる r と s がある. したがって,

$$r``\mho = \breve{v}``w, \quad (13) \qquad s``\mho = u``\bar{w}, \quad (14)$$

$\breve{r}``\mho = w \cap v``\mho$, および $\breve{s}``\mho = \bar{w} \cap \breve{u}``\mho$. それゆえ, (9)と(2)により,

$$\breve{r}``\mho = w, \quad (15) \qquad \breve{s}``\mho = \bar{w} \cap y. \quad (16)$$

(1), (4), (11)および(12)により, r と s は1–1対応である; (15)と(16)により, それらの右域は, たがいに共通のメンバーをもたない; (10), (13)および(14)により, それらの左域も同様である; したがって,

$$\text{Cor}\, r \cup s. \quad (17)$$

(13)と(5)により, $r``\mho \subseteq z$. (14)と(3)により, $s``\mho \subseteq z$. それゆえ,

$$(r \cup s)``\mho \subseteq z. \quad (18)$$

(15)と(16)により, $\breve{}(r \cup s)``\mho = w \cup y$. (9)と(6)により, $w \subseteq y$. したがって,

$$\breve{}(r \cup s)``\mho = y. \tag{19}$$

任意の

$$q \in z \qquad [\mathrm{i}]$$

を考えよう．(5)により，

$$\langle p, q\rangle \in v \qquad [\mathrm{ii}]$$

なるあるもの p がある．

ケース 1: $p \in w$. すると，[ii] により，$q \in \breve{v}``w$. したがって，(13)により，$q \in r``\mho$.

ケース 2: $p \notin w$. すなわち，(8)により，

$$\langle p, k\rangle \in {}^*(v|u), \quad [\mathrm{iii}] \qquad k \notin v``\mho \quad [\mathrm{iv}]$$

なるあるもの k がある．[ii] により，$p \in v``\mho$. したがって，

$$k \neq p. \qquad [\mathrm{v}]$$

15.11 により，

$${}^*(v|u) = I \cup (v|u|{}^*(v|u)).$$

それゆえ，[iii] と [v] により，

$$\langle p, k\rangle \in v|u|{}^*(v|u).$$

すなわち，p は k に対して $u|{}^*(v|u)$ をもつあるものに対して，v をもつ．しかし，そのあるものというのは，[ii] と (4) により，q である．それゆえ，

$$\langle q, k\rangle \in u|{}^*(v|u).$$

すなわち，

$$\langle q, h\rangle \in u, \quad [\mathrm{vi}] \qquad \langle h, k\rangle \in {}^*(v|u) \quad [\mathrm{vii}]$$

なるあるもの h がある．[iv] と [vii] により，h は $\bar{}(v``\mho)$ の中のあるものに対して ${}^*(v|u)$ をもつ．すなわち，(7)により，$h \notin w$. したがって，[vi] により，$q \in u``\bar{w}$. それゆえ，(14)により，$q \in s``\mho$.

双方のケースでともに: $q \in (r \cup s)``\mho$. しかるに，q は [i] を満足する任意のものであった．したがって，(18)により，

$$(r \cup s)``\mho = z. \tag{20}$$

それゆえ，(19)により，

$$(r \cup s)``\mho,\ \breve{}(r \cup s)``\mho \in \mho.$$

したがって，「C_2」により，$`r \cup `s \in \mho$. それゆえ，「C_1」により，$\breve{}(r \cup s)$ はあるもの x で

ある．(17)により，Cor x；そして，(19)および(20)により，$y=x``\mho$ かつ $z=\breve{x}``\mho$.

シュレーダー-ベルンシュタインの定理に対してわれわれの注意を喚起したのは，(i)—(viii)のあいだの相互関係についての反省であった．これらの相互関係についてはいうべきことがまだある．そこで，**比較可能性**あるいは**三分法の法則**(*law of comparability* or *trichotomy*)とよばれる，よく知られた「$x \preceq y \,.\!\vee.\, y \preceq x$」をとろう．後の方の名称は：

$$x \prec y \,.\!\vee.\, x \simeq y \,.\!\vee.\, y \prec x$$

という表現法のためであるが，これは，われわれの定義11.2および20.3の下では，「$\sim p \vee qp \vee \sim q$」というつまらぬ形である．もし「$x \simeq y$」および「$x \preceq y$」が，(iii)—(vii)で注意したような別の方法のどれかで定義され，そして，そのとき，「$y \prec x$」が，再び，通例のように「$\sim(x \preceq y)$」と定義されていたとするならば，上の三分法的表現における比較可能性の法則は，つまらぬものではなくて，シュレーダー-ベルンシュタインの定理に帰着したであろう．

そして，それより前の表現，「$x \preceq y \,.\!\vee.\, y \preceq x$」，での比較可能性の法則についてはどうであろうか？ あるいは，一見より強い表現「$x \prec y \,.\!\vee.\, y \preceq x$」については？ この最後は，20.3を考慮に入れれば，われわれにとっては，再び，つまらぬものである；それは「$\sim p \vee p$」という形をもつ．だが，「$x \preceq y \,.\!\vee.\, y \preceq x$」は，注目すべきことに，われわれの定義によれば，シュレーダー-ベルンシュタインの定理よりも，確立するのが困難でさえある．それは選択公理を要求するが，これには§28で言及したし，§31で直面するであろう．(33.1を見よ.)

定義に附帯する諸事情を別にすれば，ここには異なる三つのものがある：選択公理，シュレーダー-ベルンシュタインの定理，および，つまらぬもの．どれかひとつの首肯しうる形式における比較可能性もしくは三分法の法則は，再定義という見せかけの遊戯の中で三つのうちのどれかになってしまうかもしれない．どれかの方法で定義するということは，選択公理を仮定するという負担も，シュレーダー-ベルンシュタインの定理を証明しその包括化前提を仮定するという負担も，とりのぞいてくれはしない．私の定義の選び方は，ただ，これら偶然的な事態を適宜先へ引きのばすというだけの利点をもっていたのである．

(i)—(viii)自体のなかにも，選択公理を必要とする結びつきがある．(i)の意味，われわれの意味での「$\alpha \preceq \beta$」が(vi)を含意するのを示すのには，それが必要となる．(33.2を見よ.)

30. 無限カーディナル数

多の尺度としての数は，**カーディナル数**(*cardinal numbers*)とよばれる．かくして，自然数は有限カーディナルとして適当である．それらのほかに，無限クラスのおのおのに対して，無限カーディナル数——クラス z とクラス w のカーディナル数は，$z \simeq w$ のときかつそのときにかぎって，等しい——が存在するはずである．

われわれは，§11で，自然数はどのようなものであるべきかについて，ツェルメロ，フォン・ノイマンとフレーゲのうちのどれをとるか裁断せずに，ただ未定義の「0」と「S」とから始めるだけで，どのように自然数について多くのことをなしうるかを見た．いま，しばらくのあいだ，カーディナル数一般に対して同様に中立的な態度をとり，単に，z のカーディナル数に対する記法「$\bar{\bar{z}}$」を未定義と考え，それについて，$\bar{\bar{z}} = \bar{\bar{w}} \,.\!\equiv\!.\, z \simeq w$ なることを要求するに止めよう．カントールのやり方は，そういうものであった[1]．すると，算術における比較と演算とを，これもまた本質的にカントールのものであるところの次の定義によって，カーディナルにあてはめることができる．

$$x \leqq y \,.\!\equiv (\exists z)(\exists w)(x = \bar{\bar{z}} \,.\, y = \bar{\bar{w}} \,.\, z \preceq w),$$

$$x < y \,.\!\equiv (\exists z)(\exists w)(x = \bar{\bar{z}} \,.\, y = \bar{\bar{w}} \,.\, z \prec w),$$

$$x + y = (\iota v)(\exists z)(\exists w)(x = {}^{=}(z \cap w) \,.\, y = {}^{=}(z \cap \bar{w}) \,.\, v = \bar{\bar{z}}),$$

$$x \cdot y = (\iota v)(\exists z)(\exists w)(x = \bar{\bar{z}} \,.\, y = \bar{\bar{w}} \,.\, v = {}^{=}(z \times w)),$$

$$x^{y} = (\iota v)(\exists z)(\exists w)(x = \bar{\bar{z}} \,.\, y = \bar{\bar{w}} \,.\, v = {}^{=}\{u \colon \mathrm{Func}\, u \,.\, u``\mathcal{V} \subseteq z \,.\, \breve{u}``\mathcal{V} = w\}).$$

この最後のものの背後にあるアイディアは，もし z のメンバーを w のすべてのメンバーに割りあて，どの二つもおなじものに割りあてることがなければ，w のおのおののメンバーに対し，それに何を割りあてるかについての $\bar{\bar{z}}$ 箇の選択があるということである；かくして，その仕事全部をやるのには，$\bar{\bar{z}}^{\bar{\bar{w}}}$ 箇の方法がある．$x+y$ および $x \cdot y$ の定義の背後にあるアイディアは，もっとはっきりしている．もちろん，これらのアイディアは有限に根ざしている；それらを無限カーディナルの和，積，および巾を定義するのに用いる際には，われわれは，有限のケースからの外挿法により，これらの演算の無限のケースに任意に意味を附与しているのである．

順序数の和および積とは異なって，上のように定義されたカーディナルの和と積は可換的である(ただし，穏当な包括化前提を認めて)．だが，それでも，おなじみの算術のすべ

1　Suppes, 111—125 ページをも見よ．

てが移されると期待してはならない.

そこで, $\alpha = \mathrm{N} \cap {}^{-}\{\Lambda\}$ としよう. そのとき, $\mathrm{N} = \iota``\alpha$, それゆえ, $\mathrm{N} \preceq \alpha$ ($\iota \restriction \alpha \in \mathfrak{V}$ を仮定して), それゆえ, $\Lambda \notin \alpha$ ではあっても, $\alpha \cup \{\Lambda\} \preceq \alpha$. これは, おなじみの算術に反して, $\bar{\bar{\alpha}}+1 \leqq \bar{\bar{\alpha}}$ を与える. もっと一般的には, 任意の無限カーディナルは, より大きくはない任意のカーディナルを加えても, あるいは, かけても, もとのままである.

巾乗の関数は, どちらかといえば, これほど鈍感でないのが観察できる. そこで, 2^y を考察しよう. 上の定義によって, 2^y は, $s \neq t$ で w が y 箇のメンバーをもつ場合, $u``\mathfrak{V} \subseteq \{s, t\}$ かつ $\breve{u}``\mathfrak{V} = w$ であるような関数 u がどれだけあるか, ということである. さて, w の部分クラスのおのおのに対して, ちょうどひとつのそのような関数 u がある. なぜなら, w の部分クラスのおのおのに対応して, その部分クラスのメンバーには s を, w の他のメンバーには t を割りあてる関数がある; しかも, 逆に, そのような関数のおのおのに対応して, その関数が s を割りあてるものがそのメンバーとなっている部分クラスがある. そこで, w が y 箇のメンバーをもつ場合, 2^y は ${}^{=}\{z : z \subseteq w\}$ である. だが, カントールの法則, 28.17, によって, $w \prec \{z : z \subseteq w\}$. それゆえ, $y < 2^y$.

この議論は, いくつかの点において, とくに 28.17 に訴える際に, 暗黙のうちに包括化前提に依存しているが, 28.17 の包括化前提は, あるケースでは, 逆理に陥るために成りたたないにちがいない. しかし, $y < 2^y$ は, そのような限界内にある. しかも, それにもかかわらず, ここにも鈍感さがある; というのは, 無限の y に対しては, $2^y = 3^y$, さらには, $2^y = y^y$ さえもえられるからである[2].

最初の無限カーディナルは, カントールによって, $\aleph_0$(アレフ ゼロ)とよばれた. クラス x は, これをそのカーディナル数としてもつためには, 任意の無限クラス程度には小さくなければならないが, 任意の有限クラス程度に小さくてはならない.

$$\aleph_0 = \bar{\bar{x}} . \equiv (y)(x \preceq y . \equiv (z)(z \in \mathrm{N} . \supset . \{,,,z\} \prec y)).$$

その次のカーディナルを, カントールは, $\aleph_1$ とよんだ; 等々. かくして,

$$\aleph_1 = \bar{\bar{x}} . \equiv (y)(x \preceq y . \equiv (z)(\aleph_0 = \bar{\bar{z}} . \supset . z \prec y)).$$

「$\preceq$」の反射性以上のものをほとんど用いずに, 上の定式化に基づいて, $w \simeq x$ のときにのみ, $\aleph_0 = \bar{\bar{w}}$ かつ $\aleph_0 = \bar{\bar{x}}$ なることが容易にたしかめられる. $\aleph_1$ その他に対しても同様である.

2 たとえば, Bachmann, 120 ページ, を見よ. 和と積についての鈍感な諸法則の証明と同様に, この証明も選択公理に依存する.

無限の $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ のあとには，包括化を許せば，$\aleph_\omega$ が存在する．それは，カーディナル数 $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ のうちの任意のものを有するクラスのどれよりも大きいが，こんどは，それらすべてよりも大きいどのクラスよりも大きくないクラスのカーディナル数である．それから，$\aleph_{S'\omega}$ さらに，結局，$\aleph_{\omega\cdot 2}$，等々，がくる．われわれがいま獲得しつつあるものは，「<」関係，すなわち，$\{\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle: x \prec y\}$ によって順序づけられている無限カーディナルの枚挙である．有限カーディナルは，その順序づけの関係を，$\beta =$

$$\{\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle: (u)(u \in \mathrm{N} \,.\supset.\, \{,,, u\} \prec x \prec y)\}$$

として表現することによって，除外されてもよい．そのとき，$\aleph_z$ は，すべての順序数 z に対して $\mathrm{e}\beta`z$ として定義されうる．

多くの問題点がある．どの無限カーディナルもアレフである——どの無限クラス x に対する $\bar{x}$ も，ある $z \in \mathrm{NO}$ に対して $\aleph_z$ である，ということを示すことができるだろうか？　$\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ のあるもの，または，すべてが空ではない，ということを示すことができるだろうか？　それらは，大きなクラスがないために空なのではなくて，ありすぎるために空であったかもしれない：つまり，ちょうどそのつぎに大きい無限クラスがなにかあるのではなくて，際限のない下降系列があったかもしれないのである．そうではなくて，上の β は整列順序づけである，ということを示すのには，選択公理が要求される．そのためには，注意したように，比較可能性を保証することさえ——それゆえ，β が順序づけであることを示すことさえも必要なのである．

他方，選択公理をわれわれが認めるときには，それに伴なって，カーディナルの理論にとってはひじょうにありがたいひとつの定理：命数定理(numeration theorem)，がえられる，この定理は，任意のクラス x のメンバーとある順序数までの順序数とのあいだには 1–1 対応がある，ということをのべている[3]．(ある順序数までの順序数は，まさに，フォン・ノイマン方式での順序数のメンバーであるが，しばらくは，表現法から離れたままでよい.) かくて，どのカーディナルも，あるカーディナル u に対して，$^{=}\{y: y <_o u\}$ ということになるが，ここで，「$<_o$」は，順序数的な意味での「<」(フォン・ノイマンにとっては，「$\in$」)である．

ω より前にあるものはすべての無限順序数よりも前にあるから，どの無限順序数も，ω がもつより少ない先行者をもつことはない．そこで，$\{y: y <_o \omega\}$ は，$u \in \mathrm{NO}$ なる無限なる

3　§32. x のメンバーがすべての順序数に 1–1 に対応しているような極端なケースは除外されるが，それは，大部分の集合論では，そのような x が存在しないため，結局のところ，$\mathrm{NO} \notin \mathfrak{V}$ のため，である．

クラス $\{y: y<_0 u\}$ がそうありうる程度に小さい．それゆえ，どのカーディナルもある $u\in$ NO に対して $^=\{y: y<_0 u\}$ であるのだから，$\aleph_0$ は $^=\{y: y<_0 \omega\}$ である．$\aleph_0$ とは，どれだけ多くの有限順序数があるか，である．かくて，$\aleph_0={}^=$N でもある．このサイズのクラス x は，そのメンバーのすべてに自然数を割りあてることができる，$x\simeq$N，という事実を匂わせて，**可附番** (*denumerable*) とよばれる．

もしどの無限順序数 u に対しても $\aleph_0={}^=\{y: y<_0 u\}$ ならば，命数定理によって，$\aleph_0$ はただひとつの無限カーディナルである．もしそうでないならば，順序数というのは整列しているから，$\aleph_0<{}^=\{y: y<_0 u\}$ であるような最小の順序数 u がある．この最小の u は ω_1 とよばれる．かくして，$\{y: y<_0 \omega_1\}$ は，$u\in$ NO であるときの $\{y: y<_0 u\}$ なるクラス程度には小さいものでありうるが，それでも，$\aleph_0$ というサイズよりは大きい．それゆえ，どのカーディナルもある $u\in$ NO に対して $^=\{y: y<_0 u\}$ であるから，$\aleph_1$ は $^=\{y: y<_0 \omega_1\}$ である．

この順序数 ω_1 は，$\omega\cdot 2$, ω^ω, ω^{ω^ω} をはるかにこえている，$(\omega^{\omega^{\omega^{\cdot}}}$ であるところの) ε さえもはるかにこえている．これは次のようにして分る．いやしくも，S‘ω, $\omega\cdot 2$, ω^ω, ω^{ω^ω} のようにして達しうるすべての順序数およびこれらに類似のものは，この組織的な記法で特定化しうるし，同様に特定化しうるもの以外に，介在するものはなにもない．さて，記法上ではこのように途切れずに近づいてゆくことが適切になしうるのは，与えられた記法で構成可能なすべての表現のクラスが，次のようにつねに可附番である，ということによっている．アルファベットは有限なので，もっとも短かい表現の数は有限であろう；それらに，アルファベット順に，0, 1, 2, ..., m と番号をつけよう．そのつぎに短かい表現の数も有限であろう；それらに，アルファベット順に，$m+1$, ..., n と番号をつけよう．等々[4]．したがって，S‘ω, $\omega\cdot 2$, ω^ω, ω^{ω^ω}, ε, 等々，のおのおのは，たかだか可附番箇の先行者を有する，と結論される．しかるに，そのおのおのはその先行者のクラスである．それゆえ，そのおのおのは可附番クラスである．したがって，可附番クラスでない最初の順序数 ω_1 は，それらすべてをこえている．カントールの用語では，ω から始まる介入的な順序数は，有限順序数に対して，**第2級の数クラス** (*second number class*) を構成している．

同様にして，ω_2 が，もしそのようなものがあれば，$\aleph_1<{}^=\{y: y<_0 u\}$ なる最小の順序数 u であるとき，$\aleph_2$ は $^=\{y: y<_0 \omega_2\}$ である．ω_1 から始まり，ω_2 より前までの順序数は第3級の数クラスを構成する．それらの数クラスのうちには，S‘ω_1, S‘(S‘ω_1), $\omega_1+\omega$, ω_1+S‘ω,

4 辞書式順序づけとよばれるこの方法は，1905年，König と Richard の二人によって用いられた．

$\omega_1\cdot 2$, $\omega_1\cdot\varepsilon$, $\omega_1{}^{\omega}$, $\omega_1{}^{\omega_1}$ がある．しかし，もちろん，これらの多くには，予めきめられているどのような記法も及ばないのである．

同様にして，$\aleph_3$ は $^{=}\{y: y<_0\omega_3\}$ である，等々．さらに，ω_ω が，もしそのようなものがあれば，すべての有限な i に対して，$\aleph_i<^{=}\{y: y<_0 u\}$ なる最小の順序数 u であるとき，$\aleph_\omega$ は $^{=}\{y: y<_0\omega_\omega\}$ である．それゆえ，一般に，$\aleph_z$ は $^{=}\{y: y<_0\omega_z\}$ である．

ω_z を定義している特徴は，それが，その下に $\aleph_z$ 箇の順序数をもっている最小の順序数である，ということである．かくして，ω_z は，**初期**(*initial*)順序数：先行するどの順序数よりも多くの順序数がそれに先行している無限順序数，とよばれているものである．逆に，どの初期順序数も，ある z に対して ω_z であることを，超限帰納法によって示すことができる．

かくして，先ほど出された問いに答えることができる：どの無限カーディナル $\bar{\bar{x}}$ もあるアレフである．なぜなら，命数定理によって，$\bar{\bar{x}}$ は，ある無限順序数 u，実際には多くの u，に対して $^{=}\{y: y<_0 u\}$ である．順序数は整列しているから，最小のそのような u があるだろう．それは初期順序数，それゆえ，ある z に対して ω_z，であろう．したがって，$\bar{\bar{x}}={}^{=}\{y: y<_0\omega_z\}=\aleph_z$．

アレフというのは，選択公理が未定状態におかれている研究でも一役演ずる．だが，そのような場合，それらのアレフは，特殊なカーディナル：無限の整列順序づけの全域のカーディナル数，とみなされている．

カントールの法則は，無限カーディナルが次から次へと進んでゆくことをわれわれに語っていた；$y<2^y$．さらに，命数定理は，それら無限カーディナルがすべてアレフであること，それゆえ，つねに，ちょうどその次のものがある，ということを規定していた．依然として，次の問いが残っている：y と 2^y とのあいだには，ちょうどその次というものがあるのか，それとも，それは 2^y なのか？ この問いはカントールに由来する．2^y がちょうど y を超えている，というのは，**一般連続体仮説**(*generalized continuum hypothesis*)として知られている．その特殊なケース「$2^{\aleph_0}=\aleph_1$」は，単に，連続体仮説とよばれる[5]．これらの事柄については，直観はなんとも決しえないように思われる．この仮説についていいうるほとんどすべてのことというのは，それが，あきらかに，その反対よりはより単

---

5 そうよばれるのは，$2^{\aleph_0}$ が，すべての実数のクラスのカーディナル数を意味しているところの連続体の濃度とよばれるからである．ちなみに，ここでの「濃度」(power) とは，カーディナル数に対する Cantor の用語 *Mächtigkeit* に対するものである．「巾集合」(power set) における「巾」(power) は，指数の意味での巾，*Potenz*，に対するものである．§38 を見よ．

純な仮定だ，ということである．(さらに，§33参照.)

さらにいくつかの概念に言及しておく必要がある．順序数 x は，カントール以来，$\omega^x=x$ なるとき，**エプシロン数**(*epsilon number*)とよばれてきた．そこで，上の ε は，最初のエプシロン数である．どの初期順序数もまたエプシロン数である[6]．ここには，順序数の巾とカーディナルの巾とのあいだのコントラストが見られる．カーディナルでは，$z=x=1$ でないならば，けっして $z^x=x$ ではない．

順序数と同様，カーディナルのあるものは直接の先行者をもち，あるものはもたない．後者，たとえば，$\aleph_0$ と $\aleph_\omega$ は，**極限**(*limit*)カーディナルとよばれる．さて，極限カーディナルは，いっそう詳しくいえば，もしそのおのおのが x より小なるカーディナルの，x 箇より少ないカーディナル的和のどれもがそれ自体 x より小さいならば，タルスキー(Tarski)の用語(1938)における，**到達不可能数**(*inaccessible number*)である．

有限に多くの有限数のどの和も有限であるから，$\aleph_0$ は到達不可能数の資格をもつ．$\aleph_0$ をこえているそれ以上の到達不可能数がある，ということは明確でない．

到達不可能数の定義が，カーディナルのたぶん超限的であるような系列の上でのカーディナル的な総和の定義を前提していることに注意されたい．しかし，§25の終りで，それをどう定義するか，をわれわれは見た．この場合には，順序数的な意味のかわりに，「＋」にカーディナル的な意味を与えればよい．

到達不可能数 x は，より詳しくいえば，もしそれが，カーディナル的な意味での y^z が，x より小さいすべてのカーディナル y と z に対して，x より小さい，というそれ以上の条件をみたしているならば，ツェルメロにとっての *Grenzzahl*[7]，あるいは，タルスキーにとっての**狭い意味での到達不可能数**(*inaccessible in the narrower sense*)である．かくして，$\aleph_0$ は，再び，その資格がある．タルスキーは，もし一般連続体仮説が仮定されれば，この追加条件が前の条件から出てくることを示している．

それでも，われわれは $\bar{\bar{x}}$ を解釈しなければならない．本質的にはフレーゲのもの(1884, §72)であるホワイトヘッドとラッセルの方式は，順序数についての彼らの方式(上の140ページ)と平行で，自然数についてのフレーゲ方式の直接の拡張である(75ページ)．それによれば，$\bar{\bar{x}}$ は $\{y: y\simeq x\}$ である．クラス y が z 箇のメンバーをもつということは，有

6　Bachmann, 117ページ；Sierpiński, 1958, 395ページ.

7　1930. 彼は，カーディナルよりもむしろ初期順序数を扱っていたが，von Neumann 方式では，われわれが，これから見るように，それらはおなじである．到達不可能数および関連事項についてのより詳細は，以下304ページと306ページの文献を見よ；また，Bachmann；Kreider and Rogers；Mendelson, 202—205ページを見よ.

限な z に対するとおなじく無限の z に対しても，$y \in z$ をいうことである.

解釈されていないカーディナルのために上で定式化された算術の定義は，カーディナルの任意の表現法の特殊性が一役演ずるようになるときには，煮つまってくる．とくに，$x+y$ の定義は，いまや，次のように圧縮される：

$$\{z: (\exists w)(z \cap w \in x \,.\, z \cap \bar{w} \in y)\}.$$

読者は，他の定義を試みられるとよい.

さて，その経済性からして好ましいフォン・ノイマンのカーディナルの表現法に転じよう．われわれは，すでに，$\aleph_z = {}^{=}\{y: y <_0 \omega_z\}$ なることを見た；それゆえ，もし，フォン・ノイマンの方法であるところのわれわれの正規のやり方で順序数をとり，したがって，「$<_0$」が「$\in$」となるならば，われわれは，単に，$\aleph_z = {}^{=}\omega_z$ を有する．いま，もう一歩進んで，${}^{=}\omega_z$ を ω_z と解釈すれば，無限カーディナルのフォン・ノイマンの表現法がえられる．それぞれのアレフ，$\aleph_z$，は，こうして，$\aleph_z$ 箇のメンバーのクラス，すなわち，初期順序数 ω_z そのものと解釈される．(選択公理の下では)すべての無限カーディナルはアレフであるから，これは無限カーディナルを説明してくれる．有限カーディナルを彼は，単に，有限順序数(あるいは，彼の意味での自然数)とみなしている．そこで，いまや，どのカーディナル数 x も，有限であろうと無限であろうと，ただちに順序数であり，x 箇の順序数のクラスである．フォン・ノイマン流に，y が x 箇のメンバーをもつということは，有限な x に対すると同様無限の x に対しても，$y \simeq x$ なることをいうことである.

フォン・ノイマンの有限数については，そのおのおの，x，が最初の x 箇の順序数のクラスである，ということができた．ただひとつにきまらないという事実がなければ，おなじことを彼の無限カーディナルについていうこともできたであろう；たとえば，もしあなたが第2級の数クラスの任意の箇所で止まれば，ちょうど $\aleph_0$ 箇の数をあなたはもっている．しかし，われわれは，彼のカーディナルについて，そのおのおの，x，が x 箇の順序数の底クラス (bottom class) である，ということができる.

われわれの定義に移ろう．フォン・ノイマンにとって，どの順序数が $\bar{\bar{\alpha}}$ であるのか？$\alpha \simeq$ なる最初の順序数．あるいは，順序数はそれより前のすべての順序数のクラスであるから，それは $\alpha \succ$ なるすべての順序数のクラスである.

30.1　　「$\bar{\bar{\alpha}}$」あるいは「${}^{=}\alpha$」は「$\{x: x \in \mathrm{NO} \,.\, x \prec \alpha\}$」を表わす.

カーディナル数は，どのようなアプローチをしても，端的に，ある x に対して，$\bar{\bar{x}}$ であ

る任意のものである．しかし，フォン・ノイマンのアプローチでは，それは，なによりもまず，自分自身のカーディナル数であろう，それゆえ，

30.2 「NC」は「$\{x: x = \bar{\bar{x}}\}$」を表わす．

$\bar{\bar{x}}$ を解釈する前に，どのように $\aleph_z$ を枚挙によって定義するかを，そしてそれから，どのように ω_z を $\aleph_z$ から定義するかを，ほぼ十分な程度に見た．しかし，いまのアプローチでは，$\aleph_z$ の定義は ω_z の定義である．それでは，$\aleph_z$ の以前のわれわれの定義は何であったのか？　それは，β が無限カーディナルの順序づけであったときの，$\mathrm{e}\beta`z$ であった．カーディナルが順序数である現在，求められている順序づけは無限カーディナル内での $\mathfrak{E}$ である．さて，有限カーディナルのクラスは ω である；それゆえ，無限カーディナルのクラスは $\mathrm{NC}\cap\overline{\omega}$ である；したがって，無限カーディナルの順序づけは $\mathfrak{E}\cap((\mathrm{NC}\cap\overline{\omega})\times\mathrm{NC})$ である；それゆえ，

30.3 「ω_α」は「$\mathrm{e}(\mathfrak{E}\cap((\mathrm{NC}\cap\overline{\omega})\times\mathrm{NC}))`\alpha$」を表わす．

カーディナルの「≦」と「<」に対する前にあげられた定義は，もちろん，フォン・ノイマンのカーディナルに対しては効力を失う；彼の順序数について一般にそうであるように，「⊆」と「ϵ」で十分である．和と積の定義は，フォン・ノイマンのカーディナルに対しては，次のように，もっと簡潔になされうる：

$$x+y = {}^{=}(x\cup(y\times\{\Lambda\})), \qquad x\cdot y = {}^{=}(x\times y).$$

$y\times\{\Lambda\}$ の要点は，y と同様，それは y 箇のメンバーをもっているが，y と異なって，(x, $y\in\mathrm{NO}$ であるかぎり)それは x といかなるメンバーも共有していない，ということである．

§22において，順序数の算術的演算が，実際上ではないとしても，理論的には，§16のそれらと記法上では区別さるべきだ，ということが指摘された．カーディナルの算術的演算もそうあるべきである．フォン・ノイマンに従って，カーディナル数と初期順序数とが区別されていないときでさえも，これらの演算もまた順序数の算術的演算から区別されなければならない．このアプローチでは，順序数とカーディナルとの算術的演算は，たしかに，有限では一致する；しかし，それらは超限では相違する．すでに，このことは巾乗のケースにおいて指摘されたし，和と積についても真である．たとえば，カーディナルの和あるいは積，$\omega+\omega=2\cdot\omega=\omega\cdot 2$ は単に ω であるのに，§22におけるような順序数の和あるいは積，$\omega+\omega=\omega\cdot 2\neq 2\cdot\omega$，はカーディナルではまったくなく，カーディナル ω と ω_1 とのあいだにある．

順序数の和と積によると，フォン・ノイマンの意味での順序数のカーディナル的な和と積とは，実際，単に $^{=}(x+y)$ および $^{=}(x\cdot y)$ として定義されうる．この観察を，私は，A. T. ティモスコ (Tymoczko) に負う．

X. 選 択 公 理

31. 選択と選択子

クラスのサイズの比較に関して，§29の終りで，陳腐でつまらぬことが二つ注意され，私がそこでは定式化しなかった**選択公理**(*axiom of choice*)にそれらは依存している，といわれた．この前提ないし公理はツェルメロ(1904)にさかのぼる，そして，それの意味するところは，たがいに素であるクラスの任意のクラスが与えられると，それからの**選択**(*selection*)，すなわち，(Λを除いた)これらのたがいに素であるクラスのおのおのからちょうどひとつのメンバーを含むクラスが存在する，ということである．「βはαからの選択である」に対する簡潔な記法を採用することにしよう：

31.1　「$\beta \,\mathrm{Sln}\, \alpha$」は「$(y)(y \in \alpha \,.\, y \neq \Lambda \,.\supset (\exists x)(\beta \cap y = \{x\}))$」を表わす．

αに属するクラスがたがいに素であるという条件は，次のように簡潔に表わせる：$\mathrm{Func}\breve{\ }(\mathfrak{E}\restriction\alpha)$．そこで，

31.2　「$\mathrm{Ch}\,\alpha$」は「$\mathrm{Func}\breve{\ }(\mathfrak{E}\restriction\alpha) \supset (\exists w)(w \,\mathrm{Sln}\, \alpha)$」を表わす

と書けば，参照の便宜上，選択公理を「$(z)\,\mathrm{Ch}\,z$」とひとまとめにしてよい．

直観的には，この原理は首肯しうると思われるし，一目瞭然とさえ思われる．難点というのは，出発点として要求しうるほどには，それが単純で初等的な言明でなく，しかも，なにかもっと簡単なものから厳密にそれを演繹する方法が知られていない，ということにほかならない．この理由からして，選択公理に依存する結果とそうでない結果とのあいだに，区別を設けるのが普通のやり方である．したがって，私は，この原理を公理または公理型としては採用せず，必要な場所でそれを前提として用いるだけにしよう．かくして，7.10，13.1，および23.12以上の包括化仮定をとり扱ってきたのと同様に，それをとり扱うことにしよう．

選択公理は，クラス存在の仮定ではあるが，それ自身は包括化仮定ではない．なぜなら，パラメーターとしての「α」(または「z」)をもつメンバー性の条件によって，α(またはz)に関する選択wを特定化する一般的な方法は存在しないからである．一般に，包括化公理の十分なストックがおかれている後でさえも，欲するならば，選択公理は仮定されなければならない．

私が包括化公理7.10, 13.1, および23.12を採用したのは，それらがいかなる無限クラスをも措定することがないからであった．無限クラスの存在は，それ以上の包括化公理を延期することにより，まさしく，未定のままなのであった．さて，選択公理の情況は，事実上，同様である：それを公理として採用しないということで，われわれは，実際，その無限のケースを未定のままにしているにすぎない．なぜなら，αが(堅固に)有限である場合には，Ch αが証明できるからである．その証明は，包括化公理が乏しいために，乏しくない場合よりも長いものになる．いかなる特殊な包括化前提もつけ加えられてはいないし，また，23.12も関係していない．

31.3 $x \in \mathrm{N} \,.\, \alpha \preceq \{,,,x\} \,.\!\supset \mathrm{Ch}\,\alpha.$

証明のアイディア．もし，yが，そのひとつがzであるような$n+1$箇のたがいに素であるクラスのクラスであり，かつ，もし$s \,\mathrm{Sln}\, y \cap {}^{-}\{z\}$ならば，$z \neq \Lambda$のときは，すべての$w \in z$に対して$(s \cap \bar{z}) \cup \{w\} \,\mathrm{Sln}\, y$がえられるし，また，$z = \Lambda$のときには，単に，$s \,\mathrm{Sln}\, y$がえられる．かくして，$n+1$箇のたがいに素であるクラスのあらゆるクラスは，もしn箇のたがいに素であるクラスのあらゆるクラスが選択をもつならば，選択をもつ．しかるに，31.1により，$\Lambda \,\mathrm{Sln}\, \Lambda$．したがって，帰納法により，たがいに素であるクラスのあらゆる有限なクラスは選択を有する．

証明の細部．

$$y \preceq \{,,,x\}, \quad [\mathrm{i}] \qquad \mathrm{Ch}\, y \cap {}^{-}\{z\} \quad [\mathrm{ii}]$$

なる任意のものyとzを考えよう．

ケース1：$z \notin y$．すると，$y \cap {}^{-}\{z\} = y$．かくして，[ii]によって，Ch y．

ケース2：$\sim \mathrm{Func}\,\breve{}\,(\mathfrak{E} \restriction y)$．すると，31.2により，空虚にCh y．

ケース3：$\mathrm{Func}\,\breve{}\,(\mathfrak{E} \restriction y)$．かつ，$z \in y$．すると，

$$\mathrm{Func}\,\breve{}\,(\mathfrak{E} \restriction (y \cap {}^{-}\{z\})).$$

したがって，[ii]と31.2により，

$$s \,\mathrm{Sln}\, y \cap {}^{-}\{z\} \qquad [\mathrm{iii}]$$

なるあるものsがある．

ケース3a：$z = \Lambda$．すると，31.1の「$\neq \Lambda$」を考慮すれば，[iii]は「$s \,\mathrm{Sln}\, y$」に等しい．したがって，31.2により，Ch y．

ケース3b：$z \neq \Lambda$．すると，あるもの

$$w \in z \qquad [\mathrm{iv}]$$

がある．ケース3の仮説により，y のどのメンバーも重複しない；それゆえ，$z \in y$ なので，

$$z \cap \bigcup(y \cap {}^{-}\{z\}) = \Lambda. \qquad [\mathrm{v}]$$

[iii] が s について語っていることは，s が $\bigcup(y \cap {}^{-}\{z\})$ のうちにないものを s から減らしたり，s に加えたりするときにも，31.1 を考慮すれば，あいかわらず真である．したがって，[v] により，$s \cap \bar{z}\,\mathrm{Sln}\,y \cap {}^{-}\{z\}$，あるいは，[iii] があいかわらず真であることから，[iv] により，

$$(s \cap \bar{z}) \cup \{w\}\ \mathrm{Sln}\ y \cap {}^{-}\{z\},$$

すなわち，31.1 により，

$$(t)(t \in y\,.\,\Lambda \neq t \neq z\,.\supset (\exists r)(((s \cap \bar{z}) \cup \{w\}) \cap t = \{r\})). \qquad [\mathrm{vi}]$$

しかるに，

$$((s \cap \bar{z}) \cup \{w\}) \cap z = \{w\} \cap z$$

([iv] により) $$= \{w\}.$$

かくして，[vi] における「$t \neq z$」という保証は不要である．それを落すと，31.1 によって，[vi] を：

$$(s \cap \bar{z}) \cup \{w\}\ \mathrm{Sln}\ y \qquad [\mathrm{vii}]$$

と圧縮できる．したがって，$(s \cap \bar{z}) \cup \{w\}$ は y のメンバーのおのおのとたかだかひとつのメンバーを共有する．すなわち，

$$\mathrm{Func}\,\{\langle u, v\rangle : u \in (s \cap \bar{z}) \cup \{w\}\,.\,u \in v \in y\}.$$

この関数を β とよぼう．[i] と 28.7 により，$\beta``y \preceq y$．それゆえ，[i] および 28.12 により，$\beta``y \preceq \{,,,x\}$．しかるに，あきらかに，

$$((s \cap \bar{z}) \cup \{w\}) \cap \bigcup y \subseteq \beta``y.$$

したがって，28.1 により，

$$((s \cap \bar{z}) \cup \{w\}) \cap \bigcup y \preceq \{,,,x\}.$$

そこで，28.10 により，

$$((s \cap \bar{z}) \cup \{w\}) \cap \bigcup y \in \mho. \qquad [\mathrm{viii}]$$

注意したように，y からのどの選択も，$\bigcup y$ のうちにないものをそれから減らすときでも，あいかわらず選択である．したがって，[vii] により，

$$((s \cap \bar{z}) \cup \{w\}) \cap \bigcup y\ \mathrm{Sln}\ y.$$

それゆえ，[viii] により，$(\exists u)(u \,\mathrm{Sln}\, y)$. したがって，31.2 により，$\mathrm{Ch}\, y$.

すべてのケース (1, 2, 3a, 3b):「$\mathrm{Ch}\, y$」は [i] と [ii] から証明されている．ゆえに，

$$(y)(z)(y \preceq \{,,,x\} \,.\, \mathrm{Ch}\, y \cap {}^{-}\{z\} \,.\supset \mathrm{Ch}\, y).$$

しかるに，また，31.1 により，$(s)(s \,\mathrm{Sln}\, \Lambda)$，それゆえ，31.2 により，$\mathrm{Ch}\, \Lambda$. これらから，28.15 により，31.3 が推論される．

したがって，選択公理はその無限のケースに対してのみ必要である，ということが分った．

クラスの任意のクラスに対して**選択子**(*selector*): (Λ を除いた) メンバーのおのおのからひとつのメンバーを選ぶ関数，が存在するということをのべている選択公理の異なる表現法がある．簡潔に定義すると，

31.4 「$\beta \,\mathrm{Slr}\, \alpha$」は「$\beta \subseteq \mathfrak{C} \,.\, \alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \subseteq \arg \beta$」を表わす．

したがって，問題の法則とは，穏当な包括化前提に基づけばそれが選択公理「$(z)\, \mathrm{Ch}\, z$」と等値であることを示すことができるのであるが，「$(z)(\exists w)(w \,\mathrm{Slr}\, z)$」である．

一般性を加えるためには，「$(z)(\exists w)(w \,\mathrm{Slr}\, z)$」にではなく，それに対応する〔言明〕型「$(\exists w)(w \,\mathrm{Slr}\, \alpha)$」に向うのがよい．ところが，しかし，等値について語るには特別な注意が必要である．なぜなら，「$(\exists w)(w \,\mathrm{Slr}\, \alpha)$」は，適当な包括化前提の下でさえも，「$\mathrm{Ch}\, \alpha$」と等値ではないからである．その関係は，どちらかといえば，次の通りである．実際，α からの選択を (もちろん，α のメンバーがたがいに素であるならば) α 自身からの選択子によって特定化することができる；だが，逆に，α からの選択子を特定化するためには，α 自身からではなく，

$$\{y \times \{y\} : y \in \alpha\}$$

からの――たがいに素である関係のクラスからの選択を用いるのである．詳細は，次の二つの定理型においてのべられている．

31.5 $\beta \,\mathrm{Slr}\, \alpha \,.\, \mathrm{Func}\, \breve{}(\mathfrak{C} \restriction \alpha) \,.\supset.\, \beta``\alpha \,\mathrm{Sln}\, \alpha.$

証明．最初の仮説と 31.4 により，

$$\beta \subseteq \mathfrak{C}, \quad (1) \qquad \alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \subseteq \arg \beta. \quad (2)$$

$$x \in \alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \qquad [\mathrm{i}]$$

なる任意のもの x を考えよう．すると，(2) により，

$$\beta``\{x\} = \{y\} \qquad [ii]$$

なるあるもの y がある．そのとき，(1)により，$y \in x$；また，[ii] および [i] により，$y \in \beta``\alpha$；ゆえに，

$$y \in x \cap \beta``\alpha. \qquad [iii]$$

$x \cap \beta``\alpha$ のいかなるメンバー v に対しても，$\langle v, u\rangle \in \beta$ なるひとつの $u \in \alpha$ が存在する，したがって，(1)により，$v \in u$．かくして，

$$\langle v, u\rangle \in \beta, \qquad v \in x \in \alpha, \qquad v \in u \in \alpha.$$

最後の二つから，第2の仮説により，$u = x$ がえられ，それゆえ，「$\langle v, u\rangle \in \beta$」は「$\langle v, x\rangle \in \beta$」となるが，これは，[ii] とともに，$v = y$ を与える．したがって，$x \cap \beta``\alpha$ のどのメンバーも $y$ であるのが分る．そこで，[iii] により，$x \cap \beta``\alpha = \{y\}$．しかるに，$x$ は [i] を満足する任意のものであった．したがって，

$$(x)(x \in \alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \,.\supset (\exists y)(x \cap \beta``\alpha = \{y\})).$$

すなわち，31.1 により，$\beta``\alpha$ Sln α.

31.6 $\beta \,\text{Sln}\, \{y \times \{y\} : y \in \alpha\} \,.\supset.\, \beta \cap \mathfrak{E} \,\text{Slr}\, \alpha.$ [1]

証明．仮説と 31.1 により，

$$(z)(z \in \{y \times \{y\} : y \in \alpha\} \cap {}^{-}\{\Lambda\} \,.\supset (\exists w)(\beta \cap z = \{w\})),$$

すなわち，

$$(y)(y \in \alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \,.\supset (\exists w)(\beta \cap (y \times \{y\}) = \{w\})).$$

すなわち，y が $\alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\}$ の任意のメンバーである場合，$\beta \cap (y \times \{y\})$ はちょうどひとつのメンバーを有する．そのメンバーというのは，v が y に対して β をもつ y のひとつのそしてただひとつのメンバーである場合，それゆえ，v が y に対して $\beta \cap \mathfrak{E}$ をもつひとつのそしてただひとつのメンバーである場合，$\langle v, y\rangle$ でなければならないであろう．したがって，y が $\alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\}$ の任意のメンバーである場合，ひとつのそしてただひとつのものが y に対して $\beta \cap \mathfrak{E}$ をもつであろう，ということが分った．すなわち，

$$\alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \subseteq \arg(\beta \cap \mathfrak{E}).$$

1　もしも「β Slr α」を，単に，「$\alpha \cap {}^{-}\{\Lambda\} \subseteq \arg(\beta \cap \mathfrak{E})$」として，あるいは，もう一度，「$(x)(\Lambda \neq x \in \alpha \,.\supset.\, \beta`x \in x)$」として定義したならば，$\beta$ それ自身は α の選択子の資格を有したであろう；そして，それゆえ，31.5 および他の箇所で語句を若干調整すれば，それは可能であったでもあろう．

したがって，31.4 により，$\beta \cap \mathfrak{E}$ Slr α.

選択公理の表現法「(z) Ch z」と「$(z)(\exists w)(w$ Slr $z)$」との等値を，適当な包括化前提を条件として，31.5 および 31.6 に基づいて，どのように証明するかは，明らかである.

われわれは前に包括化前提「C_1」と関係をもった. それは，われわれが満足しそうなどんな集合論においても成りたつ. おなじことがいわれてもよいもうひとつの包括化前提は「$(x)(x \cup \{\Lambda\} \in \mathfrak{V})$」である. さて，これら二つの前提を仮定すれば，

$$(\exists w)(w \text{ Slr } \mathfrak{V}) \supset . \mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$$

なることを見よう. なぜなら，w Slr $\mathfrak{V}$ なる場合には，31.4 により，arg $w \cup \{\Lambda\} = \mathfrak{V}$ を有する. しかるに，「C_1」により，arg $w \in \mathfrak{V}$. したがって，$(x)(x \cup \{\Lambda\} \in \mathfrak{V})$ なので，$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ をうる.

これの教訓は，選択公理の「$(z)(\exists w)(w$ Slr $z)$」という表現法が誘発するある種の強化というのが見せかけのものだ，ということである.「$(z)(\exists w)(w$ Slr $z)$」がクラスのおのおのに対して選択子を要請するのに反して，「$(\exists w)(w$ Slr $\mathfrak{V})$」は普遍的な選択子を要請する. しかし，上述の推理は，二つのおだやかな包括化前提を仮定すれば，「$(\exists w)(w$ Slr $\mathfrak{V})$」は $\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ または $\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ に応じて，支持できないか，あるいは，すでに，「$(z)(\exists w)(w$ Slr $z)$」に含まれているかのいずれかであることを示している.

われわれの公理「$\{x, y\} \in \mathfrak{V}$」(7.10) において，われわれは究極クラスに反対する立場をとった. 他方，究極クラスを認める集合論に対しては，いま考えた普遍的選択子に漠然と対応するもの，すなわち，おそらく究極クラスを無視して，単に，(Λ 以外の) あらゆる集合からひとつのメンバーを取る選択子が存在するかどうか，という問いが生じうる. 要するに，この命題は，$(\exists w)(w$ Slr $\bigcup \mathfrak{V})$ ということである. だが，やはり，われわれの上述の推理があてはまる：その命題は，もし $\bigcup \mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ なら，支持できないし，もし $\bigcup \mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ なら，すでに「$(z)(\exists w)(w$ Slr $z)$」に含まれている[2].

究極クラスを認める集合論に再び背をむけて，もう少し註釈を加えるために，普遍的選択子の問いに戻ろう. $\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ のときには，「$(\exists w)(w$ Slr $\mathfrak{V})$」が成りたたないのをわれわれ

---

2 Gödel, 1940, 6 ページ，の公理 E は，われわれの記法では，ちょうど，「$(\exists w)(w$ Slr $\bigcup \mathfrak{V})$」になる. だが，彼の体系に対しては，「$\bigcup \mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」が他の公理から生ずるので，これは，「$(z)(\exists w)(w$ Slr $z)$」の単なる等値形であった. 彼がそれを『選択公理のひじょうに強い形』とよんだときには，彼はそれを，彼の 5.19 によって，再びたがいに等値な，次の二つと対照していたのである：

$$(z)(z \in \bigcup \mathfrak{V} . \supset (\exists w)(w \text{ Slr } z)), \quad (z)(z \in \bigcup \mathfrak{V} . \supset (\exists w)(w \in \bigcup \mathfrak{V} . w \text{ Slr } z)).$$

は見た．それでも，もし原初的選択子述語「$\mathfrak{S}$」がつけ加えられるならば，所期の効果の大部分を要請することができる．なぜなら，そのとき，$\{\langle x, y\rangle : \mathfrak{S}xy\} \in \mathfrak{C}$ とか，$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ あるいは $(\exists w)(w \text{ Slr } \mathfrak{V})$ とかを暗示せずに：

(i) $$\{\langle x, y\rangle : \mathfrak{S}xy\} \text{ Slr } \mathfrak{V}$$

を公理として採用できるからである．より直接的には，われわれがつけ加えた原初的記法に，二座選択子述語「$\mathfrak{S}$」の形ではなく，選択子演算子「σ」の形を与えれば，単に，

(ii) $$(x)(x \neq \Lambda \,.\!\supset\!.\, \sigma x \in x)$$

を要請することができよう．このアプローチによれば，変項の位置に「σx」を認めるように，基礎になっている量化の論理学をも調整しなければならないであろう．

(ii) という手段は，スコーレム (Skolem) (1929) による．そして，それは，図式化：

(iii) $$\alpha \neq \Lambda \,.\!\supset\!.\, \sigma\alpha \in \alpha$$

によって，もう少しゆるやかなものにできる．この展開方法は，本質的にはヒルベルト (Hilbert) による[3].

だが，(i)—(iii) は，全面的に，今までの方針からはずれている．それらは原初的記法を増すし，しかも，それらが増しているものを直観的な言葉に翻訳する方法さえ，われわれは知らないのである．

32. 公理の等値式

選択公理のもうひとつの等値形は，あらゆる関数はその値がおなじであるような 1-1 対応をかくまっている，というものである．すなわち，

(i) $$(y)(\text{Func } y \supset (\exists x)(\text{Cor } x \,.\, x \subseteq y \,.\, x``\mathfrak{V} = y``\mathfrak{V})).$$

というのは，もし Func y ならば，

$$\{z : (\exists w)(z = \breve{y}``\{w\})\}$$

は，たがいに素であるクラスのクラスであり，それゆえ，選択公理に従って，選択，u，をもつ；そのとき，次の定理型が示すように，$y{\restriction}u$ は，(i)の「x」に関する条件を満足する．

3 Bernays and Fraenkel, 197 ページ，によってこのように定式化され，かつ，Hilbert に帰せられている．これは，Hilbert の ϵ-演算子を暗に指している；Hilbert and Bernays, vol. 2, 9 ページ以下を参照．

32.1 $\mathrm{C}_1 \,.\, \mathrm{Func}\, y \,.\, \beta\, \mathrm{Sln}\, \{z : (\exists w)(z = \breve{y}``\{w\})\} \,.\!\supset\!.\, \mathrm{Cor}\, y \restriction \beta \,.\, (y \restriction \beta)``\mho = y``\mho.$

証明. 最後の仮説と 31.1 により，

$$(z)(w)(z = \breve{y}``\{w\} \neq \Lambda \,.\!\supset (\exists x)(\beta \cap z = \{x\})). \qquad (1)$$

「C_1」により，$\breve{y} \in \mho$. したがって，「C_1」と 29.3 により，$\breve{y}``(w) \in \mho$. それゆえ，(1) の「$z$」に「$\breve{y}``\{w\}$」をいれてもよい．かくして，

$$(w)(\breve{y}``\{w\} \neq \Lambda \,.\!\supset (\exists x)(\beta \cap \breve{y}``\{w\} = \{x\})).$$

すなわち，

$$(w)(w \in y``\mho \,.\!\supset (\exists x)(\breve{}(y \restriction \beta)``\{w\} = \{x\})).$$

すなわち，10.2 により

$$y``\mho \subseteq \arg \breve{}(y \restriction \beta). \qquad (2)$$

したがって，10.10 により，$\mathrm{Func}\, \breve{}(y \restriction \beta)$. それゆえ，第 2 の仮説により，$\mathrm{Cor}\, y \restriction \beta$. しかるに，また，(2) により，$(y \restriction \beta)``\mho = y``\mho$.

選択公理の帰結としての (i) については，それだけのことである．逆に，(i) から選択公理をうるためには，(i) の y を $\{\langle y, w\rangle : w \in y \in z\}$ にとろう．それによって，(i) の前件は，31.2 により，ちょうど「$\mathrm{Ch}\, z$」の前件となり，一方，後件は，ある 1-1 対応 x が $\{\langle y, w\rangle : w \in y \in z\}$ の部分クラスで，おなじ左域をもっている，ということをいっていることになる．それから，すぐに，「$\mathrm{Ch}\, z$」を確立しているところの $\breve{x}``\mho\, \mathrm{Sln}\, z$ なることが分る．この推理のうちに暗黙に含まれている包括化前提は，容易に見出される．

古典的に選択公理と等しいものとされているもうひとつの法則は，表面上では，(i) より一般的であって，あらゆる関数はおなじ右域をもつ関数をかくまっている，ということをのべている．すなわち，

(ii) $$(y)(\exists x)(\mathrm{Func}\, x \,.\, x \subseteq y \,.\, \breve{x}``\mho = \breve{y}``\mho).$$

われわれがこれまでにあげた選択公理の等値式のうちで，(ii) と等値であることがもっとも容易に示されるのは，次の式である：

$$(z)(\exists w)(w\, \mathrm{Slr}\, z).$$

われわれは，(ii) における y を $\mathfrak{E} \restriction z$ ととることによって，これを (ii) から導きだすことができる；なぜなら，(ii) によって存在する x は，31.4 から容易に分るように，「$w\, \mathrm{Slr}\, z$」を満足する関数 w であることが，ただちに判明する．逆に，(ii) を導きだすには，

$$z = \{u : (\exists v)(u = y``\{v\})\}$$

とって，w Slr z となるときには，(ii) が

$$x = \{\langle u, v\rangle : \langle u, y``\{v\}\rangle \in w\}$$

よって満足されることを見ればよい．含まれている包括化前提は明らかである．

選択公理のいっそう驚くべき等価形は，どのクラス z も (SEQ の意味での) 系列の左域ある，という趣旨の**命数定理** (*numeration theorem*) である．より詳しくは，z は重複ない系列，それゆえ，1–1 対応である系列の左域である．したがって，z のメンバーとる順序数までの順序数とのあいだには 1–1 対応が存在する．一言でいえば，任意のクラのメンバーは数えることができる．

事実，β Slr $\{x : x \subseteq z\}$ なる場合，z の特定の命数法 w は，直観的な言葉では，次のよに特定化しうる．選択子 β は，z の (Λ 以外の) おのおのの部分クラス x から，代表メバー $\beta`x$ を選ぶ．さて，命数法 $w$ は順序数 $\Lambda$ に $z$ 自身の代表メンバー $\beta`z$ を割りあて；次の順序数，$\{\Lambda\}$，には $z \cap {}^-\{\beta`z\}$ の代表メンバー $\beta`(z \cap {}^-\{\beta`z\})$ を割りあてる，一般 $y$ までの順序数に割りあてられていない $z$ の残りのメンバーがあれば，その代表メン－ $\beta`(z \cap {}^-(w``y))$ を順序数 y のおのおのに割りあてる．

この系列 w を形式的に特定化する方法は，超限回帰法による．そのために，その生成数を探そう．独立変項 y を除く y までの系列 w の値-と-独立変項，というすべての対クラス u が与えられるとしたとき，$w`y$ とは何であろうか？ それは $z$ の残りの $\beta$ でる；それゆえ，$z$-マイナス-それ以前のそれらの値すべて，の $\beta$ である；ゆえに，$\beta`(z \cap$ $``\mho))$．したがって，要求される生成関数は，

$$\{\langle y, u\rangle : \langle y, z \cap {}^-(u``\mho)\rangle \in \beta\}$$

らり，もし，

2.2 「$\Psi_{\beta\gamma}$」は「$\{\langle y, x\rangle : \langle y, \gamma \cap {}^-(x``\mho)\rangle \in \beta\}$」を表わす

書くとすれば，簡潔に，$\Psi_{\beta z}$ である．このとき，z の希望の命数法 w は $A\Psi_{\beta z}$ である．したがって，証明を要求している命数定理の実質的内容とは，β Slr $\{x : x \subseteq z\}$ なる場合，$\Psi_{\beta z}$ が，その左域が z で右域が順序数であるような 1–1 対応である，ということであ包括化前提を補なうと，その法則は次のようになる：

2.3 $C_1 . \beta \operatorname{Slr} \{x : x \subseteq z\} . w = A\Psi_{\beta z} .\supset. \operatorname{Cor} w . w``\mho = z . \breve{w}``\mho \in \mathrm{NO}.$

証明. 「C_1」により，

$$\breve{w}``\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}. \tag{1}$$

第2の仮説と定義により，

$$\beta \subseteq \mathfrak{E}, \tag{2}$$

$$\{x: \Lambda \neq x \subseteq z\} \subseteq \arg \beta. \tag{3}$$

z の任意の部分クラスに対して，たかだかひとつのものが β を有する：すなわち，もしその部分クラスが Λ ならば，(2)によってなにものも β を有しないし，その他の場合には，(3)によって，ひとつのものが β を有する．それゆえ，32.2により，

$$\mathrm{Func}\, \Psi_{\beta z}. \tag{4}$$

したがって，26.4と最後の仮説により，SEQ w．すなわち，

$$\mathrm{Func}\, w \tag{5}$$

および $\breve{w}``\mathfrak{V} \in \mathrm{NO}$ または $\breve{w}``\mathfrak{V} = \mathrm{NO}$．それゆえ，(1)と24.4によって，

$$\breve{w}``\mathfrak{V} \in \mathrm{NO}. \tag{6}$$

「C_1」と29.3により，$(v)(w``v \in \mathfrak{V})$．それゆえ，「$C_1$」により，

$$(v)(z \cap {}^{-}(w``v) \in \mathfrak{V}). \tag{7}$$

任意の $\langle u, v\rangle \in w$ を考えよう．(5)により，$u = w`v$．さらに，$v \in \breve{w}``\mathfrak{V}$，そして，これと(4)から，26.6と最後の仮説により，$\langle w`v, w{\restriction}v\rangle \in \Psi_{\beta z}$，すなわち，$\langle u, w{\restriction}v\rangle \in \Psi_{\beta z}$ を推論できるが，これは，すなわち，32.2により(「C_1」によって $w{\restriction}v \in \mathfrak{V}$ なので)，

$$\langle u, z \cap {}^{-}((w{\restriction}v)``\mathfrak{V})\rangle \in \beta,$$

すなわち，$\langle u, z \cap {}^{-}(w``v)\rangle \in \beta$，それゆえ，(2)と(7)により，$u \in z \cap {}^{-}(w``v)$．しかるに，$\langle u, v\rangle$ は w の任意のメンバーであった．したがって，

$$(u)(v)(\langle u, v\rangle \in w \,.\!\supset.\, u \in z \,.\, u \notin w``v). \tag{8}$$

つぎに，$\langle u, v\rangle, \langle u, v'\rangle \in w$ なる任意の u, v, v' を考えよう．そのとき，(8)により，$u \notin w``v$，それゆえ，$\langle u, v'\rangle \in w$ なので，$v' \notin v$．同様に，$v \notin v'$．しかし，$v, v' \in \breve{w}``\mathfrak{V}$ で，それゆえ，(6)と23.10により，$v \in v'$ または $v' \in v$ または $v = v'$．ゆえに，$v = v'$．それゆえ，Func $\breve{w}$．したがって，(5)により，

$$\mathrm{Cor}\, w. \tag{9}$$

(8)により，

$$w``\mathcal{V} \subseteq z. \tag{10}$$

「C_1」により，$z \cap {}^-(w``\mathcal{V}) \in \mathcal{V}$. そこで，

$$z \cap {}^-(w``\mathcal{V}) \in \{x : x \subseteq z\}.$$

したがって，

$$z \not\subseteq w``\mathcal{V} . \supset . z \cap {}^-(w``\mathcal{V}) \in \{x : \Lambda \neq x \subseteq z\}$$

((3)により) $$\supset . z \cap {}^-(w``\mathcal{V}) \in \arg \beta. \tag{11}$$

(1)と(4)から，26.7と最後の仮説により，$w \notin {}^{\smile}\Psi_{\beta z}``\mathcal{V}$. すなわち，32.2により，

$$(y)(\langle y, z \cap {}^-(w``\mathcal{V})\rangle \notin \beta).$$

それゆえ，$z \cap {}^-(w``\mathcal{V}) \notin \arg \beta$. したがって，(11)により，$z \subseteq w``\mathcal{V}$. これと(10)と(9)と(6)とが求めるものである．

逆に，命数定理から，たとえば，「$(z)(\exists w)(w \,\mathrm{Slr}\, z)$」という形の選択公理へと議論するために，任意のクラス z と $\bigcup z$ の任意の命数法 y とをとろう．そのとき，次のような z の選択子：任意の $x \in z \cap {}^-\{\Lambda\}$ に適用すると，命数法 y の下での最初の数をうるような x のメンバーを $w`x$ として与えるところの関数 w，がえられる．細部は省略する．

無限クラスのあいだでよく知られている現象のひとつは，無限クラスはそれ自身の真の部分と対応をつけうるということである．このひとつのケースは，§30の終りで，概略証明された：(包括化前提を基礎にして)

(iii) $$\omega \subseteq z \in \mathrm{NO} . \supset . z \simeq z \cup \{z\}.$$

この特徴は，デデキント(1888)によって，無限性を定義するのに利用された：無限クラスは，$(\exists y)(x \simeq y \subset x)$，あるいは本質的な点をとり出せば，$(\exists y)(x \preceq y \subset x)$ なるクラス x である．この条件が，言葉のもっと普通の意味での無限性，たとえば，「$\mathrm{N} \preceq x$」，または：

(iv) $$(z)(x \simeq z \in \mathrm{NO} . \supset . \omega \subseteq z)$$

によって含意されるということの証明は，選択公理を必要とするし，命数定理の使用例を供給する．x が(iv)の意味での無限クラスであると仮定しよう．命数定理により，ある $z \in \mathrm{NO}$ に対して $x \simeq z$. (iv)により，$\omega \subseteq z$，したがって，(iii)により，$z \simeq z \cup \{z\}$. それゆえ，11.2により，$z \cup \{z\} \preceq z \preceq x$. したがって，(「$(v)(w)(v|w \in \mathcal{V})$」に依存する「$\preceq$」の推移性を仮定すれば) $z \cup \{z\} \preceq x$. それゆえ，ある関数 u に対し，11.1により，$z \cup \{z\} \subseteq u``x$. もし「$C_1$」を仮定すれば，あるもの $y$ が $x \cap {}^-(\breve{u}``\{z\})$ である；29.3参照．Func u

なので，$z \subseteq u``y$ および $y \subset x$ がえられる．したがって，$z \preceq y \subset x$．しかるに，11.2 により，$x \preceq z$．ゆえに．$x \preceq y \subset x$．

選択公理のもっとも有名な等値形は，あらゆるクラスは整列可能である，というツェルメロの定理(1904)である．より正確にいえば：あらゆるクラスは，もしそれがただひとつのメンバーをもつというのでなければ，ある整列順序づけの全域である．すなわち，

$$\text{(v)} \qquad (z)((\exists x)(z = \{x\}) \vee (\exists x)(\text{Wellord } x \,.\, z = (x \cup \breve{x})``\mathfrak{V})).$$

これは命数定理から明らかである，というのは，z の命数法 y は，z のメンバーに対して，命数である順序数の整列順序づけに平行な整列順序づけ $y|\mathfrak{C}|\breve{y}$ を供給するからである．だが，整列定理(well-ordering theorem)は歴史的にはより大きな結果であった．ツェルメロはそれを命数定理に先だって証明したからである．事実，命数定理の上述の証明は，一部，ツェルメロの整列定理の証明から導かれる．

逆に，(v)からどのようにして「$(z)(\exists w)(w \text{ Slr } z)$」を議論するかは，三つ前の段落で素描した議論から明らかである．

より単純で，ある点ではより強い(v)の変形は，まさに，領域が整列可能である，ということをのべている：

$$\text{(vi)} \qquad (\exists x)(\text{Wellord } x \,.\, (x \cup \breve{x})``\mathfrak{V} = \mathfrak{V}).$$

もちろん，(もし $\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ なら) z を $\mathfrak{V}$ にとれば，これは(v)からえられる；そして，逆に，(もし $x \cap (z \times z) \in \mathfrak{V}$ なら) α を x に，β を z にとれば，21.9 によって，これから(v)がえられる．(vi)が(v)より強い点は，集合論が，すべての x および z に対して $x \cap (z \times z) \in \mathfrak{V}$ ということを与えるよりも $\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ を与える方が一般的でない，ということである．だが，(vi)を(v)よりも強いとみなし，しかも，(vi)をやはり真でありうるとして受けいれることができるような集合論というのは，奇妙なものであろう．それは，「$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」も「$(x)((x \cup \breve{x})``\mathfrak{V} \in \mathfrak{V})$」をも認めない集合論でなければならないであろう；なぜなら，後者は，(vi)とともに，「$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」を与えるからである．

(vi)に歩がないことは，実際，なんら怪しむべきことではない；なぜなら，(vi)におけるような普遍的な整列順序づけというのは，$\mathfrak{C} \restriction \text{NO}$ の本質的性質を分けもつであろうし，NO が存在できないことは 24.4 で注意されたからである．

普遍的な整列順序づけという効果は，(vi)の法外な存在要求なしに，§31 の終りで注意した思い切った方法を採用することによって獲得されるだろうか？ そこで，$\beta \in \mathfrak{V}$ とい

う仮定なしに，β を普遍的選択子 $\lambda_x \sigma x$ ととろう．すると，32.3は，$\mho$ の命数法を，そしてそれとともに，$\mho$ の整列順序づけを保証するように思われるであろう．だが，この推理にまつわる困難は，32.3のそのような使い方が，これまでと同様に，法外な存在仮定を要求する，ということである．

§31の終りで考察した普遍的選択子に対する思い切った方法を，一方を他方からえようとするのではなく，いま，普遍的な整列順序づけに対して，単に写しとるにとどめることは，もちろん，可能でもあろう．これは，公理：

$$\text{Wellord}\,\{\langle x, y\rangle : \text{F}xy\}, \qquad (x)(\exists y)(\text{F}xy \lor \text{F}yx)$$

をみたす原初的述語「F」を採用することを意味するであろう．

私がこれまで触れなかった選択公理の等値形のうちには，有名なものがある．ひとつは，あらゆる半順序づけは極大順序づけをかくまっている，というハウスドルフ(Hausdorff)の法則である．すなわち，もし z が半順序づけ $(z|z \subseteq z \subseteq {}^{-}I)$ であるならば，いかなる順序づけ y に対しても $x \subset y \subseteq z$ でない，という意味で極大である順序づけ $x \subseteq z$ が存在する．ツォルン(Zorn)のレンマとして知られているもうひとつの等値形は，もし v が，あらゆる入れ籠 $w \subseteq v$ に対して $\bigcup w \in v$ なるクラスならば，v は $(y) \sim (u \subset y \in v)$ の意味で極大であるメンバー u をもつ，というものである．ツォルンのレンマは，次のようにして，ハウスドルフの法則からえられる．ハウスドルフの法則における z を(もし存在するなら)

$$\{\langle s, t\rangle : s \subset t \,.\, s, t \in v\}$$

にとれば，たしかに極大順序づけ $x \subseteq z$ が存在する．その全域は入れ籠 $w \subseteq v$ である．すると，ツォルンのレンマの仮定により，$\bigcup w \in v$．しかるに，$\bigcup w$ は，容易に，$(y) \sim (\bigcup w \subset y \in v)$ の意味で極大であるのが分る[1]．

33. 公理の位置

§29の終り近くで，われわれは，比較可能性の法則「$x \preceq y \,.\!\lor\!.\, y \preceq x$」によって，選択公理に対する注意を喚起された．いま，包括化と選択という必要な前提に訴えて，この〔比較可能性の〕法則を証明しよう．

---

1 選択公理およびその等値形についてより詳しくは，Bernays and Fraenkel, VI 章；Rosser, *Logic for Mathematicians*, XIV 章；Suppes, VIII 章；Rubin を見よ．

33.1 $C_1 . (u)(v)(u|v \in \mho) . A\Psi_{zx}, A\Psi_{wy} \in \mho . z \,\mathrm{Slr}\, \{u: u \subseteq x\} . w \,\mathrm{Slr}\, \{u: u \subseteq y\}$
$. \supset : x \preceq y . \mathbf{v} . y \preceq x.$

証明. 仮説と 32.3 により，次のような s と t がある：

$$\mathrm{Cor}\, s, \qquad \mathrm{Cor}\, t, \tag{1}$$

$$s``\mho = x, \qquad t``\mho = y, \tag{2}$$

$$\breve{s}``\mho, \breve{t}``\mho \in \mathrm{NO}. \tag{3}$$

「C_1」と (3) および 23.21 により，$\breve{s}``\mho \subseteq \breve{t}``\mho$，または，その逆である；たとえば，$\breve{s}``\mho \subseteq \breve{t}``\mho$ としよう．すると，(2) により，$x = (s|\breve{t})``y$．さらに，(1) により，$\mathrm{Func}\, s|\breve{t}$．さらに，「$C_1$」により，$\breve{t} \in \mho$，そこで，第 2 の仮説により，$s|\breve{t} \in \mho$．これらの結果が集まると，定義により，$x \preceq y$ ということになる．他の場合には，$y \preceq x$．

§29 の最後の文で，クラス包括化のもうひとつの単純な法則が選択公理に依存しているとしてあげられた．「C_1」と選択という前提がおかれ，ギリシヤ文字のひとつが〔集合に〕抑えられると，それは次のものになる．

33.2 $C_1 . u \,\mathrm{Sln}\, \{v: (\exists w)(v = z \cap \breve{y}``\{w\})\} . \mathrm{Func}\, y . \alpha \subseteq y``z . \supset (\exists x)(\mathrm{Cor}\, x . \alpha \subseteq x``z).$

証明. 「C_1」により，

$$y \restriction z \in \mho. \tag{1}$$

$z \cap \breve{y}``\{w\}$ は $\breve{}(y \restriction z)``\{w\}$ なので，第 2 の仮説により，

$$u \,\mathrm{Sln}\, \{v: (\exists w)(v = \breve{}(y \restriction z)``\{w\})\}. \tag{2}$$

Func y なので，

$$\mathrm{Func}\, y \restriction z. \tag{3}$$

(1) をたよりに，32.1 の「y」に代入をすると，(3), (2), および「C_1」が，

$$\mathrm{Cor}(y \restriction z) \restriction u, \quad (4) \qquad ((y \restriction z) \restriction u)``\mho = (y \restriction z)``\mho = y``z \quad (5)$$

を含意する，ということをうる．(1) と「C_1」により，$x = (y \restriction z) \restriction u$ なるあるもの x がある．すると，$x``\mho = x``z$，したがって (5) により，$x``z = y``z$，それゆえ，最後の仮説により，$\alpha \subseteq x``z$．また，(4) により，Cor x．

われわれが，「$\preceq$」の自然な定義のうちのどれかを選択するのに応じて，「$x \preceq y . \mathbf{v} . y \preceq x$」および類似の法則が，選択公理あるいはシュレーダー－ベルンシュタインの定理に依存するか，それとも，つまらないものとなるかであるのを，われわれは知っている．さて，カ

ーディナル数の初等的な算術内部での情況も，カーディナル的な算術の「≦」が「≼」に平行であるかぎり，ほとんど同様にならざるをえない：

(i) $$\bar{\bar{x}} \leqq \bar{\bar{y}} .\equiv. x \preceq y.$$

われわれの定義によれば，「$x \preceq y$.∨. $y \preceq x$」は選択公理に依存する；それゆえに，もしわれわれが，この「≦」を，(i) という 1–1 対応によってまったく直接的に定義するならば，無限カーディナル的な算術の「$z \leqq w$.∨. $w \leqq z$」が，同様に，選択公理に依存するはずであることは，確かであろう．他方，われわれは，「≦」の定義を，(i) とはまったく異なる考察に基礎づけてもよい；カーディナル数をフォン・ノイマンの意味でのある順序数とるときには，われわれはそうしている，というのは，そのとき，順序数一般に対して，また，とくにカーディナル数に対しては，「≦」は，単に，「⊆」になるからである．このアプローチによれば，「$z \leqq w$.∨. $w \leqq z$」は 23.21 から生ずるが，これは，つまらないものではたぶんないであろうが，選択公理には依存しない．だが，「$z \leqq w$.∨. $w \leqq z$」がなんらかの方法で選択公理から離されてしまうと，ただちに，(i) という相互関連自身が，そのかわりに，選択公理に依存するようになってしまうということは確かであろう．

あるいは，クラスは一般にカーディナル数をもつという命題をとろう．カーディナルのフレーゲ–ホワイトヘッド–ラッセル方式では，クラス x は，そのカーディナル数として，単に $\{y: y \simeq x\}$ を有する．$x \simeq x$ が与えられれば，これは空ではないであろう；そして，その存在は包括化公理によって保証できるでもあろう．ここでは，選択公理についての問題というものはない．だが，フォン・ノイマン流のカーディナルでは，この命題はどのようになるであろうか？ ここでは，クラス x のカーディナルとは $x \simeq$ なる最初の順序数である；その結果，$x \simeq$ なる順序数が存在することを一般に示す必要がある．そして，この点で選択公理が入りこんでくる．$x \simeq$ なる順序数（すなわち，y Slr $\{z: z \subseteq x\}$ なる場合 $\breve{}\mathrm{A}\Psi_{yx}$“$\mho$）が存在することを示すために，われわれは，命数定理 32.3 に訴える；かくして，

$$(\exists y)(y \text{ Slr } \{z: z \subseteq x\})$$

をわれわれは仮定している．

真実，フォン・ノイマンのプランによる $\bar{\bar{x}}$ は，順序数 $\{y: y \in \mathrm{NO} . y \prec x\}$ であり，これが存在するかどうかは，選択公理というよりは，むしろ，包括化公理の問題である．だが，これはごまかしである．そのように定義されたカーディナル数が測定というその所期の仕事をするのは，一般的に，意図されていたように $x \simeq \bar{\bar{x}}$ のときだけである；そして，これ

は，結局，$x\simeq$ なる順序数が一般に存在するかどうか，という問題である．

われわれは，矛盾があまりに大ざっぱな包括化公理に由来するものであることを知っている．包括化公理に見られる制限は体系によって異なる；とくに，それらの制限は，選択公理にもかかわらず，順序数に割りこんできて，ときたま，x に対して $x\simeq$ なる順序数をわれわれから奪うこともできる．とくに，今しがたそれに訴えた命数定理32.3は，その包括化前提をもっていた．その理由からして，私は，上で「一般に」を言い抜けに用いたのである．だが，選択公理は，すでにのべたように，一般的な x のためにはやはり必要である．

クラスが，一般に，適当な意味でのカーディナル数をもつことを保証するために，選択公理がフレーゲ-ホワイトヘッド-ラッセルのアプローチの下では必要なく，フォン・ノイマンのアプローチでは必要とされる，ということは，フォン・ノイマンのアプローチの批判にはならない．なぜなら，特徴的であるが，一団の定理を選択公理から独立させる方法は，そのかわりに，同様に緊急の他の定理を選択公理に依存させるにすぎないからである．とくに，選択公理は，フレーゲ-ホワイトヘッド-ラッセルのアプローチの下では，カーディナル数のあいだの大小関係が整列順序づけであることを示すのに必要となる；一方，フォン・ノイマンのアプローチの下では，これは，選択公理なしに，「NC⊆NO」と24.3および21.9から結果する．

これまで注意してきたさまざまな例は，とくに目だつのは「$x\preceq y$.∨. $y\preceq x$」であるが，選択公理の緊急の必要性を証拠だてている．それゆえ，われわれは，選択公理のそれに先だつ仮定からわれわれがそれを証明できないことを悔み，それを，矛盾なしに，それに先だつ仮定に加えることができはしないかと希望するかもしれない．この最後の点については，われわれは，ゲーデル(1940)から再保証をえている．彼は，出発点として，集合論のフォン・ノイマン-ベルナイスの体系(§43)をとるが，この体系は，無限クラスについて，実質的に内容のある，しかし，あきらかに不穏当とはいえない仮定を含んでいる，そして，彼は，もしその体系が無矛盾ならば，選択公理をつけ加えても無矛盾のままであることを示している．

彼の議論は，シェファードスン(Shepherdson)がそれ以来**内的モデル**(*inner model*)とよんでいる，フォン・ノイマン(1929)の考案を利用している：彼は，フォン・ノイマン-ベルナイスの集合論の領域の特殊な部分を区画し，変項が領域のその特殊な部分の部分クラスのみを値としてとることを許すとき，すべての公理が依然として成りたつことを示し

ている.

これを正確にするために，**相対化**(*relativization*)の観念を調べよう．いま，「α」をある現実の**項**(*term*)，すなわち，特定の変項，または2.1の非関与的な意味でのある抽象体と考えよう．さて，なんらかの量化，たとえば，「$(x)Fx$」または「$(\exists x)Fx$」によって束縛される変項は，「$(x)Fx$」を「$(x)(x \in \alpha\ .\supset Fx)$」に，また，「$(\exists x)Fx$」を「$(\exists x)(x \in \alpha\ .\ Fx)$」と書きなおすことによって，その項に(私はこれからそういうが)**制限**(*restrict*)されうる；そして，式の自由変項「y」は，その式に条件「$y \in \alpha\ .\supset$」を前につけることによって，その項に制限できる．最後に，与えられた項に式を**相対化すること**(*relativizing*)は，(まず，任意の定義された記法を，その式のすべての束縛変項が量化の変項となる点まで展開して)，上の方法によって，その式のすべての変項を同時にその項へ制限するということである[1].

フォン・ノイマン-ベルナイスの体系は，ゲーデルがそれを定式化しているように，八箇の包括化公理を有し，それらは，彼の構成において基礎的な役割を演ずる[2]. それらのお

---

1 この相対化の概念は，Gödel のものより簡単であるが，二つの表面的な点で彼のものとは異なっている．ひとつには，Gödel が，とくに集合のために一種類の変項を，そして，一般にクラスのために，もう一種類の変項を用いているところで，私は単一の一般的種類の変項を用いている．そのため，Gödel がしたように，二種類の変項を別べつにとり扱うことなしに，私は相対化を説明できるのである．だが，それはスタイル上での事柄である，というのは，「a」が集合の変項である場合，Gödel の「$(a)Fa$」および「$(\exists a)Fa$」は，次のように翻訳できるからである：

$$(x)(y)(x \in y\ .\supset Fx), \qquad (\exists x)(\exists y)(x \in y\ .\ Fx).$$

そして，これに加えて，もうひとつの相違がある．その意味するところは，彼の意味での，たとえば，(下記の)「L」への相対化が，私の意味では「$\{x: x \subseteq \mathrm{L}\}$」への相対化であるということである．この相違は，この相対化という術語を，最後の章と最近の他の文献(たとえば，Oberschelp)におけるより一層有効な応用に適したものとしている．

2 私の梗概を Gödel の原文と対照したい読者のために，ここにその関連を示しておく．Gödel の公理 B1, 5ページ，は，私の梗概を考えているときには，包括化公理：

$$(\exists z)(w)(w \in z\ .\equiv (\exists u)(\exists v)(u \in v\ .\ \langle u, v\rangle = w))$$

として描かれねばならない，ここで，Gödel の小文字の変項とは違って，私の変項は一般的である．公理 B5—8 は，おなじように変形されて移される．B3—4 はもっと直接的に移される．B2 は，35ページの中央より下の Gödel の註釈を考えれば落される．すると，それが問題の八箇の包括化公理のうちの七箇である．第8の公理は：

$$(x)(y)(\exists z)(w)(w \in z\ .\equiv: (\exists u)(w \in u) : w = x\ .\mathbf{v}.\ w = y)$$

であるが，これは，純粋な包括化公理の見出しに入れられたときの Gödel の公理 A4, 3ページ，の内容に等しい．A4 の残りの内容は，集合性の公理：

$$(x)(y)(z)((w)(w \in z\ .\equiv: w = x\ .\mathbf{v}.\ w = y) \supset (\exists w)(z \in w))$$

として分離できる．これを正しく評価するためには，読者は変項についての便法上の相違と，また，ミスプリントによるものではあるが，A4 からの「(u)」の Gödel の省略に留意しなければならない．

のおのは最悪の場合でも，

$$(x)(y)(\exists z)(w)(w \in z . \equiv \ldots w \ldots x \ldots y \ldots)$$

という形を有する；あるものは「x」を欠き，あるものは「y」もまた欠いているが，空虚な現われというのを案出すれば，八箇全部をこの形のものとみなすことができる．かくして，包括化公理は，それぞれ，すべての x および y に対するあるクラスの存在を主張している．それらのクラスは，簡単のため，第1の公理の場合には，x①y，第2の場合には，x②y，等々，とよばれてもよい．

さて，ゲーデルは，彼が F とよぶ，超限系列を特定化している．私が先へ延ばすある種の留保条件の下では，F は次の通りであるが，ここで私の数詞は順序数を指すものとする．F‘0 は Λ である．F‘1 から F‘8 までは，それぞれ，(F‘0)①(F‘0) から (F‘0)⑧(F‘0) までであり，かくして，Λ①Λ から Λ⑧Λ までである．F‘9 は F“9，それゆえ，{F‘0, …, F‘8} である．F‘10 から F‘17 までは，それぞれ，(F‘0)①(F‘1) から (F‘0)⑧(F‘1) までである．F‘18 は，再び，F“18 である．F‘19 は (F‘1)①(F‘0) である，等々．一般に，F‘9x は F“9x であり，$\langle y, z\rangle$ が順序数のすべての対の標準化された順序づけにおいて(0番目から) x 番目にくる場合，F‘(9x+1) から F‘(9x+8) までは，それぞれ，(F‘y)①(F‘z) から (F‘y)⑧(F‘z) までである．このようにして，とくに，F‘ω は F“ω，あるいは，{F‘0, F‘2, …} で，メンバーとして，Λ，および，すべての有限な y と z に対する (F‘y)①(F‘z), …, (F‘y)⑧(F‘z) とを含む．そのとき，F‘(ω+1) は (F‘0)①(F‘ω) である，等々．ゲーデルは，現に，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系内で F を形式的にどのように定義するか，を示している．

フォン・ノイマン-ベルナイスの体系は，もちろん，これら八箇の包括化公理のほかに，別の公理をもっている．そのいくつかは集合性の公理である；その体系は究極クラスをもつからである(§6参照)．さて，私が延期していた留保条件に向おう：x①y, …, x⑧y は，すべてが八箇の包括化公理からまったく直接的にえられるものとはかぎらないが，x と y とが集合であるとき，八箇全部が集合であることが保証されるように一部修正されている．

ゲーデルは F“$\mho$ を**構成可能な**(*constructible*)集合のクラス，簡単には，L とよんでいる．かくして，F は L の命数法であり，そして，L の整列順序づけ(たとえば，F|$\mathfrak{C}$|˘F；§32参照)が存在するのは確かである．これは，彼が指摘しているように，もちろん，選択公理に訴えずにフォン・ノイマン-ベルナイスの体系内で証明できる．

つぎに，ゲーデルは，(選択公理を除く)フォン・ノイマン-ベルナイスの体系の公理が「$\{x: x \subseteq \mathrm{L} . (y)(y \in \mathrm{L} . \supset . x \cap y \in \mathrm{L})\}$」に相対化されるときでも，それらの公理がやはりそ

の体系での定理となることを示すことによって，その体系についての彼の内的モデルをつくりあげる．その結果，(内的矛盾をもたない)公理のうちには，L の部分クラス以外のクラス，あるいは，それゆえ，L のメンバー以外の集合を要求するようなものはなにもありえないことになる．要するに，公理が無矛盾なら，「$\bigcup\mho=L$」は公理と矛盾しない[3]．だが，前段に従えば，「$\bigcup\mho=L$」から $\bigcup\mho$ の整列順序づけが存在する，ことを演繹できる．それから，こんどは，$(x)(x\subseteq\bigcup\mho)$ なので，21.9 により，任意のクラス x の整列順序づけが存在する，ことを演繹できる．すると，こんどは選択公理を演繹できる．したがって，選択公理は，これらの公理が無矛盾なら，これらの公理と矛盾しない．

この議論は，この素描が暗示しているほど単純ではない．それらの公理が $\bigcup\mho$ を L ととっても満足される，ということと，「$\bigcup\mho=L$」がそれらの公理と矛盾しない，ということとのあいだには，ギャップがある．なぜなら，$\bigcup\mho$ を L ととる際に，われわれが「ϵ」の解釈を妨害して，定義が「$\bigcup\mho=L$」と簡略化しているところの式が，結局のところ，それらの公理と矛盾してるようななにか他のことをいうようになる，ということが見出されはしないであろうか？　ゲーデルは，そういうことのないことを証明しているが，それは証明を必要とするのである．

ゲーデルの結果は，どの集合論にもあてはまるわけではないが，強められたツェルメロの体系(§39 におけるつけ加えをもつ，下記の §38 の体系)に移される．これは次の推理から明らかになるが，私はそれをドリベンに負う．ツェルメロの体系は集合しか知らない，そして，ツェルメロの体系のすべての定理は，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系の集合についての定理として成りたつ，という意味で，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系にはめこまれている．それで，もし，とくに，ツェルメロの体系で $\sim(z)(\exists w)(w \text{ Slr } z)$ ということが証明できたとすれば，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系で，すべての集合 z が集合である選択子 w をもつとはかぎらない，ということが証明できるであう．だが，その場合，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系でも，単に，$\sim(z)(\exists w)(w \text{ Slr } z)$ であることも証明できるであろう；というのは，置換公理型は集合のすべての選択子を集合とするからである．それゆえ，「$(z)(\exists w)(w \text{ Slr } z)$」は，もしそれがフォン・ノイマン-ベルナイスの体系と矛盾しないならば，ツェルメロの体系と矛盾しない．さらに，もし，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系が矛盾すれば，ツェルメロの体系もただちに矛盾する，という

3　Gödel の論文には，等式「V=L」が現われる．だが，彼の V，すべての集合のクラスは，われわれの記法では，$\bigcup\mho$ である．§6 を見よ．

証明 (298 ページ以下を見よ) がある．それゆえに，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系が，選択公理なしで無矛盾ならば，選択公理を有しても無矛盾である，というゲーデルの定理が移されるのである．

ゲーデルのこの結果と，大まかにいって，対をなしているフレンケル (1922) の初期の結果があるが，これはリンデンバウム (Lindenbaum) とモストウスキー (Mostowski) (1938), さらには，メンデルスン (Mendelson) (1958) によって，改善された．それは，選択公理は集合論の他の公理から独立だ，ということである．ゲーデルが示しているのは，選択公理は，彼の用いている体系の他の公理が矛盾的でなければ，反証されえないであろう，ということであった；メンデルスンの示したのは，選択公理は，また，その体系の他の公理が矛盾的でなければ証明しえない，ということであった．その対称性は，ゲーデルが用いた集合論よりも弱い：とくに，基底づけ公理の点でより弱い集合論をメンデルスンが用いていた，という点で不完全であった．より最近になって，コーヘン (Cohen) はこの制限を克服した．

ゲーデルの無矛盾性の証明は，選択公理をこえて，連続体仮説にも——さらには，一般連続体仮説 (§ 30 参照) にさえもおよぶ．というのは，もし $\mathrm{U}\mathfrak{V}=\mathrm{L}$ ならば，一般連続体仮説もまた成立する，ということを彼は示しているからである．(ちなみに，後者そのものは選択公理を含意する[4].) そして，コーヘンの最近の独立性の証明がとくに重要なのは，それが同様に一般連続体仮説にもおよんでいる，ということである．

4 Sierpiński, 1947; Tarski and Lindenbaum. Sierpinski, 1958, 434 ページ以下を見よ．

第3部　公 理 体 系

XI. ラッセルのタイプ理論

34. 構成的部分

これまでの章では，いかなる重要な存在仮定をも決定せずに，われわれは集合論の実質的な部分をつくりあげてきた．7.10, 13.1, および23.12があったが，これらは有限クラスをわれわれに与えた．これら有限クラスを超えるときには，存在前提を用いていた定理の中に表現されているそのための特別な(*ad hoc*)存在前提で，われわれは間にあわせてきたのである．

以下の諸章では，私は集合論の文献において顕著な役割を演じてきた存在仮定の重要な体系のいくつかを記述し対照することにする．歴史的なアプローチに論理的なそれを加味し，体系のあいだの関連と，差異の効果とを強調するであろう．

体系間の差異ははなはだしい．これから研究されるはずの体系のあるものは，7.10とさえも相容れないであろう．最後の部分では，私は，それらの体系の美点を保ちながらも，それらを修正することに賛同する議論をのべることになろう．

この章では，ひとつの先駆的な体系，1908年のラッセルの**タイプ理論**(*theory of types*)をのべよう．それは，ポワンカレ(Poincaré)のアイディアを借りて，1903年の試論的な示唆から展開された体系である[1]．

ポワンカレは，ラッセルの逆理を，還元不能な原理の挫折としてよりは，むしろ，微妙な誤謬の結果として説明しようとした．彼は，それを彼が悪循環とよぶものに帰した．逆理的なクラス y の定義上の特徴は「$(x)(x \in y\,.\equiv.\,x \notin x)$」であり，そして，われわれが知っているように，ここで量化された変項「x」に y 自身を値としてとらせることから，逆理が生ずる．彼の示唆したところによれば，クラス y，あるいは，その特定化が y を予想するような任意のクラスを，y 自身を特定化するのに使われている量化の範囲に含むことは違法である．彼は，この疑わしい手続きを**非述語的**(*impredicative*)とよんだ[2]．われわ

1 Russell, 1903, 付録B；Poincaré, 1906, 307ページ．Poincaréが指摘しているように，Richard, 1905, には，すでにPoincaréのアイディアを示唆するものがあった．

2 この語の成りゆきは奇妙なものであった．1906年に，Russellが，なんらかの集合論に対して，あるメンバー性の条件を述語的(predicative)とよんだのは，単に，その集合論に対してそのメンバー性の条件に対応するクラスが存在する，ことを意味していたにすぎない．PoincaréはRussellのこの用法に従った；この意味で彼が述語的と宣言したいと思っていたメンバー性の条件は，たまたま，彼が反対していた擬循環(quasi-circularity)を含まないものであった．ただちに，この術語は後の意味

れは，y を定義するのに y を前提してはならない．

定義とは，もっとも明らかな意味においては，新しい記法が古い記法に対する省略として導入されるときにおこるものである．新しい記法をすべての場合に一義的に古い記法へ展開する機械的な手続きが用意されているかぎり，適法性の問題は定義との関連ではおこりえない．さて，ポワンカレが批判したのは，「$\{x : x \notin x\}$」に対する省略としてのある特殊な記号の定義ではなくて，むしろ，そのようなクラスの存在に関する仮定そのもの，「$(x)(x \in y . \equiv . x \notin x)$」を満足するクラス y の存在の仮定である．われわれは，クラスの非述語的定義ではなく，クラスの非述語的な特定化について，また，それが事柄の要点なのであるが，クラス存在の非述語的な仮定について語る方がよいであろう．

さて，それでは，悪循環についてはどうであろうか？　循環論法は，その犠牲者を誘惑して，証明すべき事柄を，うっかり知らずに，その証明のための前提として認めるようにさせる．循環定義は，原初的な記法への展開を妨げるような仕方で被定義項を定義項へこっそりと持ちこむ．だが，クラスの非述語的な特定化は，これらのいずれでもない．それは，まずもって，逆理によってなにかが白眼視されざるをえないということ以外には，白眼視さるべき手段ではないのである．

というのは，クラスは，特定化されることによって創造されたもの――かくして，ひとつずつ日付がうたれて，時が経つにつれて数が増えていくものと，文字通りにみなされるべきではないからである．ポワンカレは，クラス理論の時間的遂行というものを提案はしなかった．クラス理論についての教義というのは，むしろ，クラスは初めからそこにある，ということである．そうである以上，非述語的な特定化に明らかな誤謬はなにもない．希望のクラスをその任意の特徴を引用することによってとり出すことは，たとえ，そのことによって，領域内の他のあらゆるものと一緒に，たまたまそのクラスの上へ量化することがあるとしても，理に適っている．非述語的な特定化は，ある個人を，その人自身を含むエール大学生の成績の平均を基にして，もっとも典型的なエール大学生としてとり出すということ以上に，あきらかに悪循環である，とはいえない．

したがって，ラッセルとポワンカレによって主張された禁制は，逆理の背後にある，隠れた，だが(一度は暴露された)明瞭なある誤謬の摘発として歓迎されるべきものではない

を獲得し，そして，前者から独立した．つぎに，Russell は，われわれがこの節の中頃でみるように，この術語に，より技術的ではあるが，しかし，同種の意味を与えた．これらすべての意味において，この術語は「述語」からはっきりと分離されねばならないが，私は，「述語」を §1 の初めで説明した意味で続けて用いている．

のである．むしろ，それは，クラスの領域を無矛盾になるまで狭めるように，包括化の法則：

$$(\exists y)(x)(x \in y \,.\!\equiv Fx)$$

を制限するためのいくつかの提案のうちのひとつなのである．

それでも，その提案は，構造上の隠喩：前もって存在するクラスだけに言及するメンバー性の条件をクラスのおのおのに対して用いて，これと定まらない最初の時から無限の期間を通して生成されうるであろうものにクラスを限定するということ，を実現しているという点で，他のいくつかの手段ほどには恣意的なものではない．隠喩はさておき，そのような集合論の明瞭な特徴とは，いやしくもメンバー性の条件によって特定化されるあらゆるクラスは，すべての変項の値がその順序づけにおいてより前にあるものに限定される，メンバー性の条件によって特定化される，というような(超限的な)順序づけをその〔集合論の議論〕領域が認めている，ということである．

ここで，われわれは，ラッセルの1908年の体系[3]の細部へ向うことにして，しばらく，クラスの概念そのものはわきへ片寄せておくことにする；なぜなら，ラッセルの理論は，他の術語ではじまるからである．

ラッセルにとっては，領域は，ある意味での個体，そして，それらの属性や関係，そして，そのような属性や関係の属性や関係，等々，から成りたっていた．属性および関係を表わす彼自身の術語は，「**命題関数**」(*propositional function*)であった．彼は，それらを表わす変項として，「ϕ」，「ψ」，… を用いた．x は属性 ϕ をもつ，x は y に対して関係 ψ をもつ，等々，をいうために，彼は記法「ϕx」，「$\psi(x, y)$」，等々，を用いた．文からの命題関数の抽象(*abstraction*)のために，独立変項の位置に，単に，山形を附した変項をおいた．そこで，y を愛するという属性と，x によって愛されているという属性とは，それぞれ，「$\hat{x}$ は y を愛する」，および，「x は $\hat{y}$ を愛する」と表わされることになるであろうが，これらはクラス抽象体「$\{x: x$ は y を愛する$\}$」および「$\{y: x$ は y を愛する$\}$」に類似したものである．$\{\langle x, y\rangle: x$ は y を愛する$\}$ および $\{\langle y, x\rangle: x$ は y を愛する$\}$ に対応する，愛するという関係，およびその逆の関係は，「$\hat{x}$ は $\hat{y}$ を愛する」と「$\hat{y}$ は $\hat{x}$ を愛する」として現われるが，その方向はこのようにアルファベット順で決定されている[4]．

そのような抽象体がより広い文脈において現われるとき，山形つきの変項を，短かい文

3　私は，1908年の論文を，それが優先するという理由で，あげる．だが，その題材を探すのにより普通で便利な箇所は，*Principia Mathematica* のはじめの部分にある．

4　Whitehead and Russell, vol. 1, 200ページ．

節からか，それとも，それを含むより長い文節からそれを抽象するものとして解釈すべきかどうかは，なんともいえないことがしばしばある．とくに，いくつかの抽象体がその引用文に現われるときにはそうである．ラッセルは，実際上では，この困難を免れたが，それは，おもに，彼が，苦心の著作において，文脈的定義によって導入し一貫して堅持した，――われわれがこれまでの諸章で用いてきたものと本質的な点で似ている――クラスと関係に対する限定されたより優れた記法によるものである．だが，彼の基礎的な理論を解説するに際して，私は，その落し穴に囲みをしながら，彼の基礎的な記法で間にあわせるように試みてみたい．

彼は，彼の個体と命題関数を，次のような方法でいわゆる**階型**(*order*)に分けた．個体は階型0であった．個体のある不特定な命題関数は階型1であった；すべてではない．その他については，命題関数の階型は，それを名指しているところの要約的表現(abstractive expression)を考察することによって決定された．その階型は，その〔要約的表現の〕うちにあるすべての束縛変項――すなわち，すべての山形つきの変項およびすべての量化された変項――の階型を超える最小の整数ととられた．変項の階型とは，それがとる値の階型という意味であった．そして，おのおのの変項が，目に見える指標によってではないとしても，暗に，単一の階型の値に制限されていることが，ラッセルのプランにとっては，本質的であった．かくして，ほかでもない，ラッセルは，命題関数が，その命題関数を特定化するのに用いられた束縛変項の値として現われるのを禁じたのであった；命題関数は，つねに，そのような変項の値となるのには高すぎる階型に属していた．

上の考察には，記号と対象とのあいだの特徴的な遣り取りがある：命題関数は，その階型を要約的表現から獲得する，そして，変項の階型は，〔変項の〕値の階型である．階型を，直接には，記法に，また，平行しては，記法の対象に帰属させて，「階型」という語に二重の意味を許すことによって，叙述は容易になる．理想的には，おのおのの変項の階型は，まず初めに，肩付数字によって示されるものと考えられてよい；すると，要約的表現のおのおのの階型は，上のようにして算出される；そして，その階型は，その表現によって名指される命題関数にまでおよぶ．ラッセル自身の叙述は，要約的表現(もしくは，まさに，開放文)と命題関数(もしくは，属性または関係)とのあいだの区別をまったくぼかしていた；だが，それは，私が模倣するつもりのない特徴で，それを歎く機会もあると思う．

外延性はクラスを属性から分離するものであるから，ここでラッセルが扱っているのは，あきらかに，クラスよりはむしろ属性である．なぜなら，二つの属性が階型を異にし，そ

れゆえ，区別されうるとしても，しかも，それらを有するものはおなじでありうるからである．たとえば，階型1の「ϕ」をもつ属性 $(\phi)(\phi\hat{x}\equiv\phi y)$ は，y の，かつ y だけの，属性であり，さらに，再び，階型2の「χ」をもつ属性 $(\chi)(\chi\hat{x}\equiv\chi y)$ も，y の，かつ y だけの，属性である；しかも，それらの階型は，それぞれ，2と3である．

関係は，ラッセルの命題関数が属性および関係として語られるような意味では，いわゆる内包上の関係(*relation-in-intension*)である；すなわち，それらは属性と似ているが，順序対や順序のある三つのものの組，等々，の単なるクラスとは違って，おなじものだけを関係づけながら相互に異なることがありうる．それらは，順序対，三つのものの組，等々，の属性として描くことができる．(しかし，ラッセルは，それらにこの種の立ちいった分析を与えはしなかった.)

一変項の命題関数，もしくは属性，と，多変項の命題関数，もしくは関係，のほかに，ラッセルは変項をもたない命題関数，もしくは命題，を認めた；彼の階型の理論は，命題にも，また，ひとつまたは多くの変項を有する命題関数にも，適用された．だが，私は，こういった話の成りゆきを跡づけることには価値を認めない．

ラッセルにとっては，多くの属性は，その属性をもっているものよりも二つまたはそれ以上高い階型に属していた．ひとつの例は，$(\phi)(\phi\hat{x}\equiv\phi y)$ に見られた．もうひとつの例は $(\exists\phi)(\psi\phi\,.\,\phi x)$ であるが，これは，属性 ψ を有するある属性をもっている，という属性である．他方，属性のうちにはそれを有するものよりも，ちょうどその次に高い階型に属するものもあった．その例は，ψ とおなじ外延をもつという属性，$(x)(\hat{\phi}x\equiv\psi x)$ であろう．そのような属性を，ラッセルは**述語的**(*predicative*)とよんだ．この語のこのテクニカルな用法と，ついさっきポワンカレに帰せられた用法とのあいだに見られる関連というのは，ポワンカレの意味で，クラス抽象体(「$\{x\colon Fx\}$」)がそのクラスを非述語的にではなくむしろ述語的に特定化するのは，それに対応する属性抽象体(「$F\hat{x}$」)が述語的な属性を名指すときかつそのときにかぎる，ということである．かくして，ラッセルは，彼の意味での述語的でない属性を認めながら，述語的な属性以外のいかなるものもクラスを決定するものとはされなかったというかぎりでは，まだ，あきらかにポワンカレの勧告を軽蔑していたわけではなかった．

もちろん，ラッセルは，属性以外の命題関数へ「述語的」という用語を拡張した．彼は，二項関係を，もしそれが関係をもっているもののそれ，あるいは，関係をもたされているもののそれ——そのどちらがより高いにせよ——よりもちょうどその次に高い階型に属し

ていれば，述語的とよんだ．三項関係およびそれ以上のものに対しても同様である．

命題関数の階型に関するラッセルの基準は，おのおのの変項がそれと分るように単一の階型に制限されていることをあきらかに予想している．実際には，彼はそれ以上に進んだ：属性に対する各変項は，それ自身がある一定の階型に属しており，しかも，その**独立変項**(*argument*)——属性をもっているもの——もまたある一定の階型に属しているような属性だけを値とするようにきめられていた．おなじように，関係に対する変項のおのおのは，最初の独立変項の位置にはある一定の階型にだけ属するような独立変項を，そして，2番目の独立変項の位置にはある一定の階型に属する独立変項だけを認める，等々，といったような，単一の階型を有する関係だけを値とするようにきめられていた．この理論の完全な形式的な提示には，たぶん，命題関数変項には当の命題関数の階型を示すための肩付数字を，そして，これらの命題関数に許される独立変項の階型を示すのには脚付数字を必要とするであろう；そして，関係の場合には，許される最初の，2番目の，等々，適当な数までの独立変項のそれぞれの階型を示すためには，脚付数字が複合的でなければならないであろう．

ラッセルは，命題関数の階型がその独立変項のおのおのの階型を超えることを要求した．命題関数が直接に抽象の記法によって与えられるときには，この制限は，前にいわれたこと，すなわち，その階型が山形のついた変項のそれを超えなければならない，ということのうちにすでに含まれている．だが，命題関数が単に変項の値として現われるときには，それは，やはり，追加制限として必要となる．そのような場合，その制限は，指標(肩付数字と脚付数字)で表わせば，変項の肩付数字がその脚付数字を超えることを要求する，ということに帰着する．ラッセルは，それほど明瞭ではなかったが．

属性を表現する記法「ϕx」，「$\phi(x, y)$」，等々，の形式は，そのひとつのもしくはいくつかの独立変項の，ひとつの階型もしくはいくつかの階型が，帰属された命題関数に対して適当なものであるときにのみ，有意味なものとして受けいれられることができた．指標でいえば，これは，ひとつの独立変項のひとつの肩付数字，もしくは，いくつかの独立変項のいくつかの肩付数字が，命題関数のそのひとつの脚付数字，もしくは，命題関数のいくつかの脚付数字のそれぞれと合致しなければならないことを意味している．

だが，実際問題として，ラッセルは，いわゆる**体系的多義性**(*systematic ambiguity*)の便法によって，指標をまったく削除した．その便法は，要するに，指標は上述の文法的制限に適したなんらかの方法によって補充されているものと考えられるべきである，という

ことである.

ラッセルが，文法的適合性という最小の要求を超えて，変項の階型についての若干の情報を彼の式の中に含めたいと思ったような場合がいくつか生じた．絶対的な階型については注意を払わなかったが，彼は，あるひとつの命題関数の階型がその独立変項の階型よりちょうどそのつぎに高いものでなければならないことを示そうと思った時があった．この目的のために，完全な指標を復活させるというよりは，むしろ，彼は，命題関数変項がどれかひとつの階型の述語的な命題関数を値とせねばならぬことを示すために，当の命題関数変項の現われている箇所のいくつかの後に感嘆符を導入した．その記法は，次節の初めで例示される.

一般に，真理関数と量化子の標準的な論理学を，問題になっている特殊な集合論に適した公理の追加だけを要求するような固定した部分構造として仮定できることは，集合論の形式的体系を提示するのには便利である．変項の種類が暗黙のうちに多くある今の場合には，この方向をまったく完全に固守することはできない．暗黙のうちに区別されている指標というのは，すでに，その単一な種類の変項を有する標準的な量化の論理学からずれているのである．しかしながら，このずれは，変項の入れかえを準備している「$(x)Fx \supset Fy$」および「$Fy \supset (\exists x)Fx$」のような法則に，主として限定されうる．「y」の役割をする変項が「x」の役割をする変項とおなじ種類のものである，すなわち，それはおなじ指標をもつことを要求するという程度に，これらを制限しなければならない[5].

指標は，補われると，変項自身によって言及されるような命題関数の階型を固定する．それらは，要約的表現によって名指される命題関数の階型をも間接的に固定する；なぜなら，〔命題関数の〕階型は最高の束縛変項のそれよりその次に高い，とわれわれは述べたからである．だが，この考察は，すべての変項が量化子もしくは山形記号によって束縛されている要約的表現だけにおよんでいるにすぎない．いかなる表現が与えられた指標をもつ変項に対して法則「$(x)Fx \supset Fy$」の下で合法的に代入されうるか，を一般的にいいうるためには，自由変項を有する要約的表現にも階型を附与しなければならない．この場合に必要なそれ以上の規定というのが次のようなものであることは，容易に分る：要約的表現の

5 多種類変項的論理(many-sorted logic)は，下記§37でさらに吟味される．量化の理論に対するアプローチのその一般的な奇妙さから，*Principia* の *9 も，標準的な論理学からはずれているという見出しをつけて，あげてよいであろう．だが，*9は，*10におけるより古典的なとり扱いに対する選択物として現われているにすぎない；さらに，それは命題の階型に依存しているが，私はこれを追求するつもりはないといっておいた.

階型は，自由変項のそれより小でない(一方，やはり，束縛変項のそれよりは大である)と見なされなければならない；問題の自由変項につぎつぎと代入することによって他の制限が破られるのを防ぐには，これで十分である．ラッセルはこの細部についてなにもいっていないが，彼の用法はこれに一致していた．

(指標もしくは感嘆符を有する)変項と，量化および真理関数の論理的記法とに加えて，ラッセルの理論の特殊な記法というのは，帰属の記法(「ϕx」,「$\phi(x, y)$」, 等々)と，命題関数の抽象を表わす山形記号の使用とである．(上記のように制限された)真理関数と量化子の一般的な論理法則に加えて，ラッセルの理論の特殊な原理は，まさしく，**具体化**(*concretion*)のそれである(2.1 参照):

(i)　　$(F\hat{x})y \equiv Fy$,　　$(F\hat{x}\hat{y})(z, w) \equiv Fzw$,　　等々.

再び，ラッセルに対しては，公平なところ，彼はこれらの事柄については多くのことをいっていない，といわなければならない．

ラッセルの逆理が彼の理論でどのようにして避けられるか，を見よう．ψ がその命題関数 $\sim\hat{\phi}\hat{\phi}$ (自分自身の属性でないという属性)である場合，具体化によって，$(\chi)(\psi\chi \equiv \sim\chi\chi)$ なること，それゆえ，とくに，$\psi\psi \equiv \sim\psi\psi$ なることがえられる．しかし，ラッセルの制限はこの推理を一再ならず妨げる．命題関数の階型はその独立変項のそれより大であることが要求されているので，「$\phi\phi$」という結合はまず文法に合わないとして排除される．そして，たとえそれがこのように排除されないとしても，ψ を $\sim\hat{\phi}\hat{\phi}$ として定義することは，ψ にその束縛変項「ϕ」より高い階型を与えることになる，それゆえ，「$\psi\psi \equiv \sim\psi\psi$」へ導いたステップにおいて，$\chi$ を ψ にとることを許さないであろう．

35．クラスと還元可能性公理

この理論が逆理に対しては弱すぎることが分ったのは喜ばしい．しかしながら，それは，われわれが放棄しようなどとはまずもって覚悟していないような古典的な数学におけるある推理に対しても弱すぎる，ということも判明する．ひとつの例は，実数のあらゆる有界なクラスは最小上界を有する，という証明である．

VI 章の展開と平行しているが，クラスのかわりに属性を，クラス・メンバー性のかわりに属性の帰属を用いてラッセルの理論で展開された実数を仮定しよう．§18 および§19 によれば，実数の有界なクラス z の最小上界は，クラス $\bigcup z$，もしくは，$\{x : (\exists y)(x \in y \in z)\}$ であった．したがって，平行して，ラッセルの体系における実数の有界な属性 ϕ の最小上

界は属性 $(\exists\psi)(\phi\psi\,.\,\psi\hat{x})$ である，と期待してよい．さて，困難は，ラッセルの階型説では，最小上界 $(\exists\psi)(\phi\psi\,.\,\psi\hat{x})$ の方が，その最小上界の求められている属性 ϕ の下に入る実数 ψ よりも高い階型に属する，ということである．

最小上界は，連続性がその基礎をなしている数学解析のすべての古典的技術に対して必要である．だが，その極限が求められている数をすでにその値としていたおなじ変項のそれ以上の値として最小上界が到達可能でないならば，最小上界はこれらの目的に対して役にたたない．より高い階型の最小上界は，そのような変項の値としての資格はなく，したがって，その目的を果さないのである．

ラッセルは，彼の**還元可能性公理**(*axiom of reducibility*)を提出して，この困難に対処した：あらゆる命題関数 ϕ に対してそれと等しい外延をもつ述語的命題関数がある．すなわち，

$$(\exists\psi)(x)(\psi!x \equiv \phi x), \qquad (\exists\psi)(x)(y)(\psi!(x,y) \equiv \phi(x,y)),$$

等々．命題関数が与えられた場合，それと外延の等しい命題関数(おなじものについて真なる命題関数)を指示し，かつ，述語性の要求を満足している，すなわち，すべての山形つきの変項より高い階型の束縛変項を提示しないような要約的表現は，存在するかもしれないし，存在しないかもしれない．だが，そのような実際の表現がひとつも存在しないとしても，それでもなお，そのような述語的命題関数は，まったく表現されていないけれども，存在している；それが，還元可能性公理の内容である．

$(\exists\psi)(\phi\psi\,.\,\psi\hat{x})$ に適用されると，ここでの「ϕ」と「ψ」を，なんの損失もなしに，述語的な属性を値とすると解釈してよい，ということを，この公理は保証してくれる．換言すれば，n が「x」によって表わされる階型である場合，「ϕ」および「ψ」を，それぞれ，階型 $n+2$ および $n+1$ の属性を値とするものと解釈してよい．かくして，階型 $n+1$ の実数 ψ の，階型 $n+2$ の有界な属性 ϕ のおのおのに対して，最小上界 $(\exists\psi)(\phi!\psi\,.\,\psi!\hat{x})$ が保証されている．さらに，再び，還元可能性公理により，この $(\exists\psi)(\phi!\psi\,.\,\psi!\hat{x})$ とおなじ外延をもつ述語的な χ が存在する．χ は，述語的であるから，その山形つきの独立変項の位置によって表わされる階型よりちょうどその次に高い階型――それゆえ，再び，$n+1$ であろう．したがって，いまや，要求されていた法則をうる：与えられた階型 $n+1$ の実数のどんな有界な属性も，それとおなじ階型 $n+1$ の最小上界を有する．

だが，§34 の初めで注意した構造上の隠喩を捨てて，むしろ，もっとも典型的なエール大学生の模範例を甘受するといった代償が支払われている．というのは，還元可能性公理

は，結局，その階型が自分自身の階型とおなじ高さである属性の上へ量化することによる以外には特定化できないような属性を，われわれに大盤振舞いしてくれるからである．それゆえ，構造上の隠喩から抽き出された逆理からのどのような意味での安全保障も，いまでは失われてしまっている．それでも，逆理の古い証明は，あいかわらず効果的に妨げられているように思われる．とくに，ラッセルの逆理に対する障害は以前のままである．

ホワイトヘッドとラッセルの**プリンキピア・マテマティカ**(*Principia Mathematica*)の基礎的部分は，せいぜい最初の 200 ページをとり上げてみると，その著作の主要部分と著しい対照をなしている．命題関数はその基礎的な部分においてのみ目に立つ；その後，この著作はむしろクラスと外延上の関係によって進む．クラスと外延上の関係による議論は，文脈的定義によって，およそ次のように，命題関数の議論を基礎としている．予備的なステップとして，メンバー性の記法は，述語的属性の帰属を表わす記法上の単なる別法として説明される：

(i) 「$x \in \phi$」は「$\phi ! x$」を表わす．

ここまでのところでは，クラスというものはない．だが，それから，クラス抽象が次のように文脈的に定義される[1]：

(ii) 「$G\{x: Fx\}$」は「$(\exists\phi)((x)(\phi ! x \equiv Fx) \,.\, G\phi)$」を表わす．

そして，クラスの上への量化は次のように定義される[2]：

(iii) 「$(\alpha)G\alpha$」は「$(\phi)G\{x: \phi ! x\}$」を表わし,「$(\exists\alpha)G\alpha$」は「$(\exists\phi)G\{x: \phi ! x\}$」を表わす．

その趣旨というのは，こうである：述語的属性をクラスとして語るとき，おなじ外延をもつもののあいだの区別を棄てさせるということを除けば，クラスは述語的属性とおなじである．そのような区別の放棄は，(ii) でなし遂げられる．なぜなら，任意のもの(「G」)があるクラス $\{x: Fx\}$ について真である，ということは，(ii) によれば，それが――どれにせよ―― $(x)(\phi ! x \equiv Fx)$ なる**ある**述語的属性 ϕ について真である，ということである．このようにして，ラッセルは，属性に対して，あるいは述語的属性に対してさえも，対応する法則を予め仮定しておく必要なしに，クラスに対する外延性の法則：

---

1 実質的に(i)および(ii)の効果をもつ構成は，すでに，Frege, 1893, 52 ページ以下に見られる．

2 この Russell の「α」は量化可能な変項である，したがって，I—X 章で，われわれが慣れてきた「α」の型〔文字〕的用法と混同されてはならない．私の *Mathematical Logic* の読者は，さらに，「α」の第 3 の用法：変項に対する構文論的変項としての用法，に慣れていた．Russell の用法はこの節に限られるであろう．

(iv)　$(x)(x \in \alpha . \equiv . x \in \beta) . \alpha \in \kappa . \supset . \beta \in \kappa$

の証明を用意している．注意したように，この法則のためにのみクラスを属性から区別することが必要なのである．

外延上の二項関係による議論は，(i)—(iii) と平行な定義によって，準備される．そのような関係に対する特殊な変項は，「Q」,「R」, 等々，であり，x が y に対して R をもつことをいい表わすための記法は，「xRy」である．したがって，定義は次のようである：

(v)　「$x\phi y$」は「$\phi!(x, y)$」を表わし，

(vi)　「$G\{xy: Fxy\}$」は「$(\exists\phi)((x)(y)(\phi!(x, y) \equiv Fxy) . G\phi)$」を表わし，

(vii)　「$(R)GR$」は「$(\phi)G\{xy: \phi!(x, y)\}$」を表わし，

「$(\exists R)GR$」は「$(\exists\phi)G\{xy: \phi!(x, y)\}$」を表わす．

そのままでは，(ii) および (vi) は，これらの定義の任意の特定な適用においてどれだけのテキストを「G」とみなすべきかという点では，とても満足できぬほど曖昧である．ラッセルは，この点を補なう便法をつけ加えた．

個体，個体の述語的属性，そのような属性の述語的属性，等々，に注意を払うかぎり，階型説ははるかに単純化されたものになる；なぜなら，これらのものの階型は，それぞれ，0, 1, 2, … であるからである．それに対応することがクラスに対してもおこる，というのは，クラスは，ちょうど，述語的属性から外延をおなじくするもののあいだの区別を引いたものだからである．これとの関連においては，ラッセルは，「階型」のかわりに「タイプ」という語を好んでいる；かくして，個体は**タイプ** (*type*) 0 であり，そのメンバーがタイプ n のクラスはタイプ $n+1$ のクラスである．

外延上の二項関係は，二次元的タイプで行われる：その関係をもっているもののタイプと，その関係がもたれているもののタイプとを特定化するときにのみ，関係のタイプは固定される．これらのタイプの二次元性はとんでもない増殖を惹きおこす．タイプ m のもののタイプ n のものに対する関係は (m, n) とよばれてよい；そのような関係のクラスのタイプは $((m, n))$ とよばれてよい；すると，そのようなクラスのあいだの関係のタイプは，$(((m, n)), ((m, n)))$ である[3]．階型はというと，それは，もちろん，はるかにもっと悪かった．ラッセルは，体系的な多義性，あるいは彼はそうよぶようになるが，**タイプの**多義性 (*typical* ambiguity) という工夫によって，そのような指標を節約した；だが，それは，大

3　Carnap, *Logical Syntax*, 85 ページも同様である．

ざっぱな説明の用をするものにすぎないと見なされねばならないような工夫のひとつであって，一方，実際の体系は複雑な指標の完全な豊富さを維持していると考えられる．なぜなら，指標が，関係に対して要求されているように複雑であるときに，それらを表現しないでおくというプランは融通がききすぎていることが判明するからである．ホワイトヘッドとラッセルは，ブラリ-フォルティの逆理を避けるためには，タイプの指標を議論の要点で復活しなければならないことを認めた[4]．

ラッセルの構成主義的アプローチは実数で躓き，それから，還元可能性公理に頼ることによって彼が構成主義を放棄した，ことをわれわれは見た．さて，さらに，構成主義を諦めるのが賢明かどうかを問わないにしても，これがそれを諦めるのにひねくれた方法であることに，われわれは注意しなければならない．なぜなら，還元可能性公理は，構成主義に内容を与える区別そのものが余計であるということを含意するからである．その議論は次の通りである．

もしその還元可能性公理を有するラッセルの体系が矛盾を免れているならば，われわれが単に述語的階型以外をすべて拒絶したとしても，いかなる矛盾も生じないであろうことは，確かであろう．あらゆる属性の階型は，その属性をもつものの階型よりその次に高い，とわれわれは言明できる；そして，内包上の関係に対しても同様である．階型 n の対象の属性である階型 $n+k$ の属性に対してなにか言及するとしたとき，われわれは，その記法を，ラッセルの記法の体系的な再解釈により，むしろ外延をおなじくする階型 $n+1$ の属性に言及するものと考えさえすればよい；そして，内包上の関係に対しても同様である．なぜなら，ラッセルの還元可能性公理は，外延をおなじくする希望通りの階型の属性もしくは内包上の関係，つまり，述語的属性，がつねに存在することを，われわれに語るからである．もしこの公理が予知されているならば，なんらかの特殊な意味での階型よりは，むしろ，初めから属性と内包上の関係の単純なタイプについて語って，その公理の必要をすべて未然に防ぐ方がよい方法である；弱い構成的な理論が固執されねばならず，そして，還元可能性公理が差控えられるときにだけ，階型を弁護することができる[5]．

ラッセルを読めば，どうして彼がこの点を看過しえたかが分る：悶着というのは，彼が，属性もしくは内包上の関係としての『命題関数』と，表現，すなわち，述語もしくは開放

4 vol. 3, 75ページ．

5 この議論は，私の学位論文 (Harvard, 1932) の 5—8ページと『On the axiom of reducibility』において，より詳しく提出された．そして，Hilbert and Ackermann, 1928年版，114ページ以下もそれに少しふれている．

文としての『命題関数』，との区別に焦点を合わせることができなかったことである．もし階型が表現内の束縛変項についての指標によって判断されるべきであるならば，表現としては，それらは視覚的に階型を異にしていた．彼は，式と対象をはっきり区別できなかったので，より高い階型の表現をして，そのまま，低い階型の属性もしくは内包上の関係に言及させる，というやり方を思いつかなかった．

余分な階型というものを保持することに対して，ラッセルは，また，独立な動機をもっていた．いままでのページで考察されなかった一群の逆理：今日では，**意味論的**(*semantic*)として知られている逆理に対して，これらの区別が役にたつ，とラッセルは考えていた．グレーリング(Grelling)に負うそれらのうちのひとつは[6]，述語は自分自身について真であるかもしれない(語として short である「short」や English である「English」や「word」や「predicate」や「pentasyllabic」のように)か，あるいは，真でないかもしれない(「long」，「German」，「verb」，「monosyllabic」，そして，実際，大概の述語のように)かのいずれかである，という反省から生ずる．「自分自身について真でない」は自分自身について真であるかどうかを問うことによって，逆理がえられる．もうひとつのそのような逆理は，エピメニデスの逆理もしくは嘘つきの逆理として，昔から伝わってきた．その伝統的形式はいろいろとあいまいにいわれることもある；それの本質的な論理は，たぶん，次のようにして，もっとも強力に表わすことができるであろう：

「自分自身の引用に添えられると偽となる」
は自分自身の引用に添えられると偽となる．

これは，ある種の文がどのようにして形成されるかを語るし，しかも，さらに，その文が偽であることを語る；だが，それがその作り方を語っている文は自分自身である；したがって，それは偽であるとき，かつそのときにかぎって真である．G. G. ベリー(G. G. Berry)に帰せられている第3の意味論的逆理は，英語には有限に多くの音節しかないという反省に基づいている；それゆえ，そのおのおのが24以下の音節で特定化できる自然数は，有限箇に多くあるだけである；そして，それゆえ，24以下の音節で特定化できない最小の自然数(a least natural number not specifiable in fewer than 24 syllables)がある．だが，私は，それを23音節で特定化したばかりである．文献には，また，その他の意味論的逆理が含まれている[7]．

---

6 Grelling and Nelson にある．この逆理は，誤まって，Weyl に帰せられたことがある．
7 Whitehead and Russell, vol. 1, 60—65 ページを見よ．

ラッセルが命題関数の下に混同した属性と開放文とのあいだの区別を維持しながらも，しかも，ラッセルの階型がそのような逆理に対して適切である，という考えを首肯しうるものとするにはどうしたらよいか，私には分らない．いずれにせよ，意味論的逆理は，当然，クラスないし命題関数の理論と無縁な特殊な概念：グレーリングの逆理の場合には，指示(denotation)（もしくは，『について真』(true of))，エピメニデスの場合には，虚偽(そして，それゆえ，真理)，そして，ベリーの逆理の場合には，特定可能性(specifiability)，に基づいて咎められるべきことは明らかと思われる．これら三つの咎められるべき概念は重要な概念であり，そして，ラッセルの逆理がクラス・メンバー性の概念に関してつくり出している危機と類似な危機を，意味論的逆理はこれらに関してつくり出している．指示，真理，および特定可能性の概念が，これらの逆理に照らして，直観的には予期できないある種の制限に従わねばならないということは，ラッセルの逆理および他のものに照らして，クラスの存在がそうしなければならないのと同様である．だが，意味論的逆理はクラスの理論に関係がない．この点は，ラッセルの理論が現われる以前からペアノによって多少なりとも主張されていた，そして，ラッセルの理論の批判において，ラムゼイ(Ramsey)によって強く主張されたのである[8]．

その独立変項が単一の階型であるような命題関数に対して階型の区別を有するラッセルの理論は，『分岐タイプ理論』(ramified theory of types)として知られるようになった；そして，ラムゼイの立場は，それがいわゆる『単純な』(simple)（あるいは，シェファー(Sheffer)の警句では，『ラムゼイ化された』(ramsified)）タイプ理論に還元されるべきである，というものであった．実際には，彼は，それほど有力な論拠を示さなかった．属性と表現とを明瞭に区別することには，ラッセルと同様，失敗し，こんどは，彼が，真に決定的な点：還元可能性公理が分岐理論の不必要性をただちに保証している，ということをあきらかに逸してしまった．

さらに，この後の方の論拠に基づいて主張されるにせよ，あるいは，それよりも決定的ではないラムゼイ流で主張されるにせよ，単純タイプ理論が，すでに，どのみち，ホワイトヘッドとラッセルのプリンキピア・マテマティカの明白な実用理論であったことは記憶されねばならない．いったん，クラスと内包上の関係に関するラッセルの文脈的定義が入手されると，分岐的部分構造は視界から消え去った；そのとき以来，すべての考えは，ク

8 Peano, 1906, 157ページ；Ramsey, 20—29ページ．Ramsey は Peano のその箇所を引いている．

ラスと内包上の関係の単純な意味でのタイプに属していた[9]. かくして，ラムゼイが主張し，私が二・三ページ前でのべていたことは，実は，誤まって考えられた基礎づけを否認することに外ならなかったのである.

属性および内包上の関係の階型のそもそもの分岐化のみならず，属性および内包上の関係それ自体をも，われわれは無しですませてもよい. ラッセルのクラスと外延上の関係は，すでにそれらがプリンキピアにおいて従っているいわゆる単純タイプ理論に従うが，単にそれらを出発点としてとってもよい. 階型の分岐化が保持され，その結果，外延をおなじくする二つの属性が階型において異なりうるかぎり，外延をおなじくする属性を区別して，それゆえ，それらをクラスというかわりに属性とよぶ必要があるのは，明らかである；だが，クラスのかわりに属性から出発することのこの理由は，分岐化を落すと，消失する.

ラッセルは，また，属性の方を哲学的により好んだし，クラスを属性の理論に基づいて文脈的に定義する際，より不明瞭なものをより明瞭なもので説明している，と考えていた. だが，この気持は，彼が，述語もしくは表現としての命題関数と，属性としての命題関数とを区別できなかったことによるものであった. この区別ができなかったので，属性の概念はクラスのそれより明白であると，彼は容易に考えることができたのである；なぜなら，述語の概念はより明白だからである. だが，属性の概念は，それよりも明白ではない[10].

ヒルベルトとアッケルマン(Ackermann)の共著(1938, 1949)やその他の場所には，命題関数についてのラッセルの古い理論をなお思い出させる記法が見られる. クラスや関係に対しては，削除できる指標のついた「F」,「G」, 等々，が見られ，それから，「$x \in \alpha$」および「xRy」のかわりに，ラッセルの「ϕx」および「$\psi(x, y)$」を思わせる「$F(x)$」および「$G(x, y)$」が見られる. だが，この追憶は誤解をまねきやすい.「F」,「G」, 等々，の値は，もはや，命題関数ではなく，むしろ，唯一の基準: おなじ外延をもつ「F」,「G」, 等々，は同一視される，ということによって，クラスと外延上の関係である.

この記法は，また，論理と集合論とのあいだの主要な区別から注意をそらすという欠陥をもっている. それは，クラスと関係の一般理論を，量化子やこれまで「x」,「y」, 等々，のためにとって置かれた他の位置にこれまでの型述語文字が新たに認められる(かくして，

9 『もしクラスの存在を仮定するなら，還元可能性公理は不要となる』(Whitehead and Russell, vol. 1, 58ページ).

10 上述の序論を見よ. 私は，この節の主題を，『Whitehead and the rise of modern logic』でもっと十分にとり扱った；また，*Word and Object*, 118—123ページ，209ページ以下においても扱った. また，Church, *Introduction to Mathematical Logic*, 346—356ページをも見よ.

「(F)」,「$(\exists G)$」,「$H(F,G)$」)ような，量化理論の単なる延長とみなすように助長する．存在仮定は，広範であるにもかかわらず，奇妙に目だたないものとなりうる；いったん量化理論の述語文字を，純粋の量化可能な変項の身分へ昇進させると，存在仮定は，これらの文字に対する普通の古い代入法則の中に単に埋もれてしまう．たとえば，

$$(\exists F)(x)(Fx \equiv \ldots x \ldots)$$

という形の任意の包括化の言明は，そのような代入によって，

$$(G)(\exists F)(x)(Fx \equiv Gx)$$

から簡単に帰結し，後者は，こんどは，「$(x)(Gx \equiv Gx)$」から結果する[11]．

集合論の論理学へのこのような同化は，タイプが有限個の多くのもので終る断片的な理論に対してヒルベルトとアッケルマン，および彼らの追随者たちによって用いられた用語法に，見られる．n がどれだけタイプが上るかを示す場合，そのような理論は，(ラッセルの意味での階型と混同されるべきではない)第 n 階の述語計算(predicate calculus of nth order)(チャーチ：関数計算)とよばれるようになった．かくして，個体，個体のクラス，および個体の関係についての理論は第2階の述語計算とよばれ，単に，述語文字が量化子に認められる量化理論とみなされた．本来の量化理論は，第1階の述語計算とよばれてきた．

それは歎かわしい趨勢であった．論理学と(タイプをもつ集合論の意味での)『タイプ理論』とのあいだの重要な区別を曖昧にするとともに，それは，タイプ理論と(タイプをもたない集合論の意味での)集合論とのあいだの相違の——あたかも，他方が含むようには一方がクラスのあからさまな仮定を含んでいないかのような——誇張された，いうならばもやもやした考えを育てた．そして，それは，タイプ理論の存在仮定をいくぶんおおいかくすとともに，量化理論自身がその「F」や「G」において，すでに，クラスもしくは属性と関係との理論であるという考えを育てた．それは，型文字と量化可能な変項とのあいだのきわめて重大なコントラストをなおざりにした．

私が歎いている記法上のスタイルは，本質的な点ではもちろん，それが，ヒルベルトと

11 この点は，早くも，von Neumann によって1927年(43ページ)に指摘されたが，Hilbert and Ackermann は見のがしていた；彼らは包括化公理をも採用した(1938, 125ページ)．彼らは，そのかわりに(Russell 流の)抽象の原初的記法に訴えることもできたろうとのべてはいるが，双方ともなしですますこともできたろう，とはのべていなかった．1949年(133ページ以下)で，存命中の著者〔Ackermann〕は，むしろ，やはり抽象の原初的記法と同等な，いわゆる定義の規則を採用した．詳しくは，私の論文『On universals』, 78ページを見よ．

アッケルマンのものである以前に，ラッセルのものであった．それは，開放文としての命題関数を属性としての命題関数から識別できないことに結びついていた．これらの失敗から生ずるいろいろとまずい結果については，前の数ページで注意しておいた；そして，いま歎いたような概念は，まさしく，それら一連のものが希薄になって続いているのに外ならない．

型文字と量化可能な変項とのあいだのコントラストをなおざりにするということは，私が型文字「α」および「R」をしてクラスおよび関係の変項を模倣させたところの仮理論を思い出させる．しかしながら，その模倣は，存在仮定をおおいかくすこととは反対のものであった．それは，存在仮定の模造であったし，それは公然のものであった．

36. 新しいタイプ理論

ラッセルのタイプ理論が§35の終りで受けた主な改良というのは，クラスと外延上の関係の側に着いて，属性と内包上の関係を落すことであった．さて，それ以上の顕著な改良がすぐ手に入る：われわれは，順序対のウィーナー－クラトウスキー (Wiener–Kuratowski) の定義9.1を採用して，外延上の関係をクラスに還元することができる．これは，プリンキピア・マテマティカの後に現われた手段である．また，クラス抽象を文脈的に定義するというそれ以上のステップをとれば，量化子，変項，および真理関数以外の唯一の原初的記法としては，「ϵ」につきる．

われわれが原理的には個体とクラスにのみ関わり，関係には関わらない以上，タイプは，実際，単純である：個体はタイプ0であり，そのメンバーがタイプnであるクラスはタイプ$n+1$である．変項としては，タイプを示すための指標をもつ，「x」,「y」, 等々，を用いてよい．この理論の原子式は，「$x^n \in y^{n+1}$」というように，継次的なタイプの変項から「ϵ」によってつくられる；そして，残りの式は，これらの原子式から量化と真理関数によってつくられる．

この目的に対するクラス抽象の文脈的定義として私が描くものは，次の通りである：

(i) 「$y^n \in \{x^n : Fx^n\}$」は「$(\exists z^{n+1})((x^n)(x^n \in z^{n+1} . \equiv Fx^n) . y^n \in z^{n+1})$」を表わし，

(ii) 「$\{x^n : Fx^n\} \in y^{n+2}$」は「$(\exists z^{n+1})((x^n)(x^n \in z^{n+1} . \equiv Fx^n) . z^{n+1} \in y^{n+2})$」を表わす．

この「n」は，「F」と同様，型文字である．この体系の実際の文は，まがいものの指標「n」,「$n+1$」,「$n+2$」のかわりに，つねに，特定の継次的なアラビア数字をもつことになる

であろう.

(i)のかわりに，われわれの古い非関与的な2.1を，次のように，移してくることもできよう：

「$y^n \in \{x^n : Fx^n\}$」は「Fy^n」を表わす.

だが，これは，以前にそこでそうしたようには，いまの場合，なんの自由をも加えることはないであろう．なぜなら，タイプ理論では，指標が順に並んでいるかぎり，クラスの存在は(下の(iv)によって)無条件に保証されているからである；そして，指標が順に並んでいないときには，文法が犯されているので，その問題はおきない．要するに，タイプ理論にとっては，(i)とこの2.1の適用形とは等値な定義である．したがって，誤まって仮クラスを思いださせたり，存在しないと思いこませたりすることのないものとして，私は，ここでは，むしろ(i)の表現法の方を好む.

同一性の定義に対しては，2.7のパターンは，いまでは，適当でない；それは「$x^0 = y^0$」を説明しないままに放っておくであろう．だが，7.14のパターンは役にたつ：

(iii)　　「$x^n = y^n$」は「$(z^{n+1})(x^n \in z^{n+1} . \supset . y^n \in z^{n+1})$」を表わす.

「$x^m = y^n$」は，m が n である場合にのみ，意味をもつことに注意されたい．その条件は，(iii)の右側にある「$x^n \in z^{n+1}$」と「$y^n \in z^{n+1}$」という組み合わせに現われている；なぜなら，「$x^m \in z^{n+1}$」は $m \neq n$ の場合には無意味だからである.

(ii)以後の定義は，自由変項のかわりに，抽象体をもつものにも採用されると理解されねばならない；かくして，その「y^{n+2}」のかわりに「$\{w^{n+1} : Gw^{n+1}\}$」を有する(ii)と，その「x^n」または「y^n」のかわりに「$\{w^{n-1} : Gw^{n-1}\}$」を有する(iii)も採用される．実際には，どのような仕方にしろ，定義のリストを続ける必要はないであろう，というのは，前の諸章からの関連する諸定義の書きなおしは明らかだからである.

いまなされた基礎的な記法の節約は，公理と証明規則という装置における調整を要求する．抽象が基礎的な記法として認められるかぎり，任意のクラス$\{x^n : Fx^n\}$の存在は，単に，変項に対する抽象体の代入を許す証明規則と「$y^n \in \{x^n : Fx^n\}$」を「Fy^n」と等しくする具体化の法則とに暗に含まれてしまった．しかし，いまの場合，われわれの基礎的な記法は，より多くの変項という以外には，変項に対する代用品を提供するものではない．いま，クラス$\{x^n : Fx^n\}$の存在を要請する方法は，次のようにはっきりと変項で表現された包括化公理型によるのである：

(iv) $$(\exists y^{n+1})(x^n)(x^n \in y^{n+1} .\equiv Fx^n).$$

それ以上の公理型が，いまの場合には，**外延性**(*extensionality*)に対して要求される：

(v) $$(x^n)(x^n \in y^{n+1} .\equiv. x^n \in z^{n+1}) . y^{n+1} \in w^{n+2} .\supset. z^{n+1} \in w^{n+2},$$

あるいは，簡単に：

$$(x^n)(x^n \in y^{n+1} .\equiv. x^n \in z^{n+1}) \supset. y^{n+1} = z^{n+1}.$$

この法則こそ，ラッセルが，クラスの記法についての彼の文脈的定義によって，属性に対するこの法則を仮定することなしに，クラスに対して証明できたものである；だが，クラスで出発する現在，われわれはそれを公理型として要求する．

この体系の定理は，これらの公理から量化子と真理関数の論理によって生ずる式である．だが，量化子の論理は，やはり，まったく標準的な論理というわけではない，なぜなら，われわれの変項は，やはり，多種類だからである(§34参照)．法則「$(x)Fx \supset Fy$」および「$Fy \supset (\exists x)Fx$」は「x」と「y」がおなじ指標をもつ場合にのみ成りたつ．

ラッセルのもとの体系よりエレガントな，集合論のこの体系化が，今日ラッセルのタイプ理論と考えられがちのものである．それは，タルスキーとゲーデルによって，最初にこの形で提出されたように思われる[1]．

順序対の定義を使用することは，節約という以上に，ある点でラッセルの体系に影響をおよぼす，ということが注意されなければならない．なぜなら，$\langle x^m, y^n \rangle$ は $\{\{x^m\}, \{x^m, y^n\}\}$ である；この中の $\{x^m, y^n\}$ は，こんどは，適当な k に対して $\{u^k : u^k = x^m .\lor. u^k = y^n\}$ である；そして，ちょうど，(iii)の後で見たところによれば，「$u^k = x^m .\lor. u^k = y^n$」のその k は，有意味であるためには，m と n でなければならず，かくして $m = n$ となる．それゆえ，関係をこの意味での対のクラスと解釈することは，すべての**異質な**(*heterogeneous*)関係：異なるタイプのもののあいだのすべての関係，の放棄を要求する．この犠牲は，われわれが，たとえば，タイプ n のものとタイプ $n+1$ のものとのあいだの関係 $\{\langle x^n, y^{n+1} \rangle : Fxy\}$ について語りたいときはいつでも一様に，タイプ $n+1$ のもののあいだのそれに対応する関係，$\{\langle \{x^n\}, y^{n+1} \rangle : Fxy\}$，について語ることができる，ということを指摘することによって，弁護される．このように，単一クラス演算子を，タイプの相等性をつくる必要があるたびごとに，より低いタイプの対象に適用することによって，タイプの異なる対象のあいだのどんな関係に対しても重宝な代用品がえられる．だが，この体系が，たとえ

1 Tarski，110ページ，113ページ以下；Gödel, 1931.

いっそう悪くなってはいないとしても，徹底的に影響をうけている，という事実は残る；なぜなら，たとえば，$\{\langle x^n, y^{n+1}\rangle: Fxy\}$ と $\{\langle\{x^n\}, y^{n+1}\rangle: Fxy\}$ とのあいだの，以前には存在したコントラストがなくなるからである．

カントールの定理は，タイプの異なるもののあいだの関係に訴える一例を与える．そこで，その補助定理 28.16 を考えよう．28.16 におい証明されるべきことは：

(vi) $$\text{Func}\, w \supset. \{x: x \subseteq z\} \not\subseteq w``z$$

であるが，これは，もちろん，これ以上になんら包括化前提をもっていない．だが，われわれは指標を補うことができなければならない．ウィーナー以前のタイプ理論によれば，異質な関係は許されるであろう，かくて，指標は次の例のような関係にあることになろう：

(vii) $$\text{Func}\, w^{(1,0)} \supset. \{x^1: x^1 \subseteq z^1\} \not\subseteq w^{(1,0)}``z^1.$$

なぜだか見てみよう．まず，任意に，「z」に指標「1」を与える；「0」以外のものなら，なんでもよいはずである．「$x^m = y^n$」のように，そして，おなじ理由で，「$x^m \subseteq y^n$」は $m=n$ の場合にのみ意味をもつ；したがって，(vi) の「x」は，「z」のように，指標「1」を受けなければならない．すると，$w``z^1$ は，(vi) の一貫性から，$\{x^1: x^1 \subseteq z^1\}$ とタイプが一致しなければならない．したがって，$w``z^1$ は，そのメンバーがタイプ 1 なるクラスである，だが，そのメンバーは，z^1 のタイプ 0 のメンバーに対して w をもつものである．したがって，w は異質な関係 $w^{(1,0)}$ でなければならない．

他方，定義されている順序対を用いると，その足りない側〔の指標〕をあげて w を同質にしなければならない，かくして：$w^{(1,1)}$．その右域にあるものは，いまや，かつてそこにあったものの単一クラスでなければならない；したがって，$w^{(1,0)}``z^1$ のかわりに，われわれは，

$$w^{(1,1)}``\{\{v^0\}: v^0 \in z^1\}$$

をもつことになるであろう．$w^{(1,1)}$ のメンバーである対は，タイプ 1 のもののクラスのクラスなので，実際には，$w^{(1,1)}$ は単に w^4 となる．したがって，(vi) は，いまや，次のようになる：

(viii) $$\text{Func}\, w^4 \supset. \{x^1: x^1 \subseteq z^1\} \not\subseteq w^4``\{\{v^0\}: v^0 \in z^1\}.$$

カントールの定理そのもの，すなわち，28.17 から包括化前提をひいたもの，は，いまや，「$z^1 \prec \{x^1: x^1 \subseteq z^1\}$」ではなくなり，(viii) と合わせると，次のようになる：

(ix) $$\{\{v^0\}: v^0 \in z^1\} \prec \{x^1: x^1 \subseteq z^1\}.$$

それは，もはや，z^1 が部分クラスよりメンバーが少ない，ことを意味せず，文字通りに，z^1 が部分クラスより少ない単一部分クラスをもつ，ことを意味している．それでも，結局，記法形式「$z^1 \prec \{x^1: x^1 \subseteq z^1\}$」を保存するようにわれわれの定義を調整できるし，もちろん，そうするでもあろう．さもないとそれは無意味なものとして消滅するであろうから，われわれはそれを単に(ix)の省略として説明できる．最初に基礎的な形式「$z^{m+1} \prec u^{m+1}$」を，おなじみの 11.1 および 20.3 のようにして定義すれば，一般に，「$z^{n+1} \prec u^{n+2}$」,「$z^{n+1} \prec u^{n+3}$」,「$z^{n+2} \prec u^{n+1}$」，等々，を：

$$\{\{v^n\}: v^n \in z^{n+1}\} \prec u^{n+2},$$
$$\{\{\{v^n\}\}: v^n \in z^{n+1}\} \prec u^{n+3},$$
$$z^{n+2} \prec \{\{v^n\}: v^n \in u^{n+1}\},$$

等々，の省略として説明できる．

二つのアプローチの下でのカントールの逆理の運命を観察してみよう．28.20 のうちで，また，それについて注意したように，現在の(vi)から逆理をうる方法は，w を I に，z を $\mathfrak{V}$ にとり，そして，$\{x: x \subseteq \mathfrak{V}\} \not\leq I``\mathfrak{V}$ を，それゆえ，$\mathfrak{V} \not\leq \mathfrak{V}$ を結論することによる．だが，これを(vii)で行なうためには，「I」と「$\mathfrak{V}$」とに対する指標を固定しなければならない．おのおののタイプのクラスに対して $\mathfrak{V}$ が存在する；(vii)の「z^1」の位置に適するものは，$\mathfrak{V}^1$，すべての個体のクラス $\{y^0: y^0 = y^0\}$，である．しかしながら，I に関しては，せいぜいできることといえば，$I^{(1,1)}$ もしくは $I^{(0,0)}$ である；そして，どちらも(vii)の「$w^{(1,0)}$」としては通用しない．異質な関係を寛容に認めるにしても，あきらかに，「$I^{(1,0)}$」は旧版のタイプ理論さえ犯している；というのは，同一性は，いつでもお構いなしに，同質だからである．

(viii)においては逆理は異なる仕方で防がれる．ここでは，実際，w^4 を，I^4 に，すべての対 $\langle y^1, y^1\rangle$ のクラスに，とることができる．また，前のように，z^1 を $\mathfrak{V}^1$ にとれば，(viii)から，

$$\{x^1: x^1 \subseteq \mathfrak{V}^1\} \not\leq \{\{v^0\}: v^0 \in \mathfrak{V}^1\}$$

がえられる．だが，これは逆理ではない．$\{x^1: x^1 \subseteq \mathfrak{V}^1\}$ は $\mathfrak{V}^2$ であり，それゆえ，個体のすべてのクラスのクラスである，一方，$\{\{v^0\}: v^0 \in \mathfrak{V}^1\}$ は個体のすべての単一クラスのクラスである．もちろん，前者は後者の部分クラスではない．

この方式の集合論が矛盾を免れていることは，一度やりさえすれば，容易に確信できる．なぜなら，タイプが次のように累積的(cumulative)であるとして再解釈されると仮定しよう．Λだけをタイプ0にとろう；再び，Λを，さらに，{Λ}を，そして，それだけをタイプ1にとろう；かくして，一般に，タイプnを，そのメンバーがタイプ$n-1$に属するすべての2^n箇の集合，そしてそれらだけからなるものにとろう．このように再解釈されると，量化のおのおのは，(その指標のおかげで)有限に多くのケースだけにおよんでいる．閉鎖文(closed sentence)のおのおのは，再解釈の下では，真または偽を機械的に調べることができる．ここには，真理関数論理と同様に問題のないミニアチュア理論がある．それでも，公理型(iv)と(v)が，このようにトリヴィアルに再解釈されたときあらゆる場合に真となることが，容易に観察される．そのとき，あきらかに，これらはもはや論理的矛盾をかくまっていることはない[2]．

順序対の定義が，異質な関係を消去しタイプを単純な進行系列に還元した以上，タイプの多義性というラッセルの便法の下で指標を削除することは，いまでは，それほど急を要することではない．だが，その削除がやはり便利なこともある．そして，皮肉にも，それは，それがより急を要したときにはそうではなかったのに，至極簡単なものとなる．ブラリ-フォルティの逆理(§35参照)との関連で示された過度の柔軟性は消え去っている．

われわれは，§34で，ラッセルとともに非述語的特定化を妨げる階型の体系を簡潔に考察した．われわれは，まだ，ラッセルと一緒になって，構成可能性を還元可能性公理で粉砕するようなことはしなかった．構成可能性を粉粋するには理由が，とくに著しいものとしては，有理数の有界なクラスの最小上界の必要性があった．だが，それが古典的な解析学には不十分であるにもかかわらず，ときには，構成可能性を開発することにも理由がある．われわれがそれらのページにおいて評価した構成上の隠喩のために，それは特別の確信を有している集合論の一部である．たとえ，より以上の目的のために非構成的な理論の協力をうる用意があるとしても，ある種の結果が構成的な集合論の範囲内にあるのを知れば，人は喜ぶこともありうる．それゆえ，私は，いま，構成的集合論にしばらく帰って，この節のより現代的な設定において，それに対してなにがなされうるかを示唆する．

タイプの構成的理論と，われわれがたったいま吟味していた非構成的な理論とのあいだ

2　多かれ少なかれ，この種の反省は，1928年(Hilbert and Ackermann)以来，文献に現われてきた．その必要はあるのであるが，もし無限公理(§39)が加えられると，無矛盾性のこのように容易な保証は利用できない．

で区別される必要のある唯一の相違点は，包括化公理型(iv)のうちにある．構成的理論に対しては，(iv)の「Fx^n」は，タイプ n 以上の束縛変項をもたず，また，$n+1$ 以上の自由変項をもたない式を表わす，とわれわれは規定しているにすぎない．ここには，命題関数の階型の定義の反響があることに注意されたい．この制限は，正確に，包括化〔公理〕型をクラスの述語的特定化に限定するのに役だつ．

この述語性の制限は，カントールの定理を妨害する．なぜなら，(viii)がどのようにして証明されるかを考えよう．もし28.16の本質的な議論を(viii)における同質性の調整と結びつけるならば，(viii)を証明するトリックは，x^1 を

$$\{v^0 : v^0 \in w^1 . v^0 \notin z^4`\{v^0\}\}$$

にとることであるのが分る．だが，包括化〔公理〕型(iv)のこのクラスの存在に必要な個別例は：

$$(\exists x^1)(v^0)(v^0 \in x^1 . \equiv . v^0 \in w^1 . v^0 \notin z^4`\{v^0\})$$

である，そして，この「z^4」は述語性の規則を犯す．

カントールの定理に対するこの障害は，それ自身，長所とみなされてもよい．無限算術の一部始終が注意に値したのは，直観的に受けいれることのできる，古典的な数学の基礎になっているのとおなじ原理によって，それらがわれわれに強制的と映ったからである．もしわれわれの構成的集合論が真に古典的な数学のすべての理由のある要求に対して適当であるならば，それが無限算術に対して不適当であることを，われわれはうまく逃げおおせたのだと考えてもよい．

だが，実際には，それは，もちろん，古典的な要求に対して適当ではない．還元可能性公理をもたないラッセルの理論のように，それは有理数ないし実数の有界なクラスの最小上界で失敗する．なぜなら，クラス z^2 の最小上界 $\bigcup z^2$ の存在を肯定する包括化公理は：

$$(\exists x^1)(v^0)(v^0 \in x^1 . \equiv (\exists y^1)(v^0 \in y^1 \in z^2))$$

となるであろうが，ここでの「y^1」と「z^2」は述語性の制限を犯しているからである[3]．

---

3 『構成的』あるいは『述語的』集合論の形式は，1918年にWeyl，そして，1924年と1925年にChwistekによって擁護された．最近では，証明論の側からこれに対して新しい光が投げられている．Kreiselを見よ；また，Wang, *Survey*, 最後の部分；また，Fraenkel and Bar-Hillel, 150—160ページ，196—264ページ．

XII. 一般的変項とツェルメロ

37. 一般的変項をもつタイプ理論

タイプの多義性という便法は，多種類の変項を区別するマークであるところの指標を削除する際に，タイプ理論を，一種類の，あるいは単純な，量化の理論へ適合させるという効果をもっている，と考えられてはならない．「$(\exists y)(x)(x \in y)$」というような式は，タイプの上で多義的としてとり扱われると，単に，不特定な指標を表わす型としての「n」をもつ〔言明〕型：

$$(\exists y^{n+1})(x^n)(x^n \in y^{n+1})$$

とおなじである．その一般性は，多くの式：

$$(\exists y^1)(x^0)(x^0 \in y^1), \quad (\exists y^2)(x^1)(x^1 \in y^2), \quad \ldots$$

の任意のひとつを表わす型的な一般性であって，議論領域全体の上へ，分割することなく，量化することに存する一般性ではない．後の方の気持からすれば，「$(\exists y)(x)(x \in y)$」は，そのメンバーがすべてのタイプの対象 x をとり尽すようなクラス y が存在する，ことを意味するであろう．タイプの上で多義的にとると，そうではない．

真に一種類的ないい廻しに翻訳されるときに，そのような多種類の理論がどのようなものと思われるか，を考えてみるのにはそれだけの理由がある．なぜなら，多種類〔変項〕的理論は，標準的な単純な量化の理論からずれているからである．加えて，指標は煩わしい：そして，もしわれわれがタイプの多義性によってそれらなしですますならば，単純な理論からのずれは，現実には，一層悪化している．というのは，タイプの多義性の方法は，タイプの理論に従う指標に合わせることのできない式を無意味とみなすことを要求するからである；そして，これは，たとえば，「$x \in y \,.\, y \in x$」のように，二つの有意味な式の連言さえ無意味となりうる，という効果をもっている．また，次の例のように，そのずれがもっと微妙なものとなることもある．量化〔言明〕型：

(i) $$(x)Fxy \supset (\exists z)Fyz$$

は妥当である．それは，「$(x)Fxy \supset Fyy$」および「$Fyy \supset (\exists z)Fyz$」から生ずるからである．さらに，その個別例のように見えるもの：

(ii) $$(x)(x \in y) \supset (\exists z)(y \in z)$$

は，タイプの多義性の基準によれば，有意味な式である．にもかかわらず，(i)を引用することによって(ii)を正当化することは誤りであろう，なぜなら，(i)の一般的な証明の中の「Fyy」は，その証明が(ii)を与えるように有意味に解釈されるのを不可能にするからである．その事実は，タイプの多義性の下での(ii)は，実際には，(i)の形ではなく，ただそのように見えるにすぎないということである．(ii)の証明は，(i)とは独立に，たとえば，後件「$(\exists z)(y \in z)$」を，タイプの上で多義的な公理型の個別例：

$$(\exists z)(x)(x \in z . \equiv . x = y)$$

から直接的に証明することによって進められねばならない．

証明の便宜というのが単純な量化論理を固執するのを好む唯一の理由なのではない．便宜ということは別としても，なお，その理由として，集合論の特殊な主題に特有な逆理を避けるために一般的な論理を分裂させるのはまさしくまずい戦術である，ということがある．これが，すでに§7 であげた最小の毀損という格率である．最後に，比較のための標準化の価値というものがある．集合論を相互にその内容の点で，あるいは，他の主題をもつ理論と形式の点で，比較したいと思うときに，基礎になっているひとつの論理をもつのは結構なことである．

多種類変項による定式化というものは，単にどのようなクラスが存在するかについての学説とみなされている場合のタイプ理論にとっては，本質的なものではない．クラスが，一般的変項を禁ずることなしに，タイプにおいて配置されている，とわれわれが考えてもまったく構わない．§4 で注意したように，もし適当な述語を採用すれば，多種類の変項は，つねに一種類の変項に還元できる．特別の種類の変項を用いてもよかったようなところではどこでも，そのかわりに一般的変項を使い，それを適当な述語に制限(*restrict*)してもよい(§33)．

このように，タイプ n のものを特定的に表わす変項として指標つきの文字を使うかわりに，x がタイプ n であること意味する記法「$\mathrm{T}_n x$」を採用してもよい．量化の形式，「$(x^n)Fx^n$」および「$(\exists x^n)Fx^n$」，によって，かつて果された目的は，いまでは，形式：

$$(x)(\mathrm{T}_n x \supset Fx), \qquad (\exists x)(\mathrm{T}_n x \,.\, Fx),$$

によって，同様に果されるようになる．また，自由変項がわれわれを引き留めることもない；自由変項を有する文は，それらの変項が束縛されるより長いテキストの文節として使われるにすぎないのが普通だからである．そこで，「ϵ」に加えて，新しい還元されない述

語「T_0」,「T_1」,「T_2」, … の採用という代価をたぶん支払ったうえで，一般的変項「x」,「y」, … の側に着いて，指標つきの特別の変項を除くのである.

実際には，おのおのの n に対する「$T_n x$」は，いま見るであろうように，純粋に「ϵ」と論理とによって表現できる.「$(\exists z)(x, y \epsilon z)$」は，$x$ と y の側でのタイプの同一性を保証する；逆に，$x^n, y^n \epsilon \mho^{n+1}$ なので，x と y の側のタイプの同一性は,「$(\exists z)(x, y \epsilon z)$」を保証する. そこで，われわれはタイプの同一性を表現できるのである. さらに，もし w がタイプにおいてちょうど y に先行するならば，そしてそのときにかぎって，w は y とおなじタイプのあるもののメンバーであろう；$w^n \epsilon \mho^{n+1}$ であるから. したがって，われわれの工夫を合わせれば,「w はタイプにおいてちょうど x に先行する」を次のように表わせる:

$$(\exists y)(w \epsilon y \,.\, (\exists z)(x, y \epsilon z)),$$

すなわち，$(\exists z)(w \epsilon^2 z \,.\, x \epsilon z)$. したがって:

(iii)　　「$w\mathrm{PT}x$」は「$(\exists z)(w \epsilon^2 z \,.\, x \epsilon z)$」を表わす

と定義しよう. いまや，おのおのの n に対して「$T_n x$」をどう表わすかは明らかである.

(iv)　　「$T_0 x$」は「$(w) \sim w\mathrm{PT}x$」を表わし,

(v)　　「$T_{n+1} x$」は「$(w)(T_n w \supset w\mathrm{PT}x)$」を表わす.

特殊な値域をもつ指標つき変項は，定義:

(vi)　　「$(x^n)Fx^n$」は「$(x)(T_n x \supset Fx)$」を表わす

によってとりもどすことができる，そして,「$(\exists x^n)$」は「$\sim(x^n)\sim$」を表わすが，これから初等的な論理によって,

(vii)　　$(\exists x^n)Fx^n \equiv (\exists x)(T_n x \,.\, Fx)$.

だが，このプランは，$m+1 \neq n$ なる場合に「$x^m \epsilon y^n$」を無意味だ，と言明したラッセルの文法的制限を撤廃している. いまでは，すべての m と n に対して「$x^m \epsilon y^n$」が意味をもつ. もし $m+1 \neq n$ ならば,「$x^m \epsilon y^n$」は単に偽となる. ラッセルの文法的制限に対して突然こんなに無頓着でいられるというのは，彼がそうする必要があったかどうかということを疑わせる. その答は，彼はその必要がなかったということである. どうして彼がそうするようになったか，は理解できる. 逆理を，真でも偽でもなく無意味なものにしよ

うというアイディアは，心をそそるものであったし，悪循環による定義不能というアイディアはそれと首尾一貫していた．だが，彼の体系それ自体は，彼がそれを作りあげてしまったときにはすでに，これらのアイディアとは独立に展開していた．§34 の終りにおけるラッセルの逆理についての観察の中に，すでに，この点を示唆するものがあった：逆理は，無意味性というラッセルの非難と変項の値域の限定との双方によって妨げられていた．そして，この点は，ウィーナーの単純化を有するタイプ理論に対しては，§36 の無矛盾性の議論によって決定的に確立されている．なぜなら，われわれがそこでそれに訴えた有限クラスのモデルは，けっして，タイプ侵犯の無意味性に依存してはいない；「$x^n \in x^n$」およびそれと類似のものは，そこでは，単に偽とよばれることができる．

ラッセルの文法的制限は，彼の体系のひとつの目的をたしかに果していた：それは彼のタイプの多義性という考案を完成した．だが，われわれが一般的変項に転ずるならば，その考案とはわれわれは手を切っている．

われわれはタイプ理論を一般的変項の言葉へ翻訳する方法をもっている．いま，その方法を，その理論の公理型，すなわち，§36 の (iv) と (v) とに関係させよう．普遍量化子の暗黙の了解の下にそれらを翻訳すれば：

(viii) $(\exists y)(\mathrm{T}_{n+1}y\,.\,(x)(\mathrm{T}_n x \supset : x \in y\,. \equiv Fx))$,

(ix) $\mathrm{T}_{n+2}z\,.\,\mathrm{T}_{n+1}x\,.\,\mathrm{T}_{n+1}y\,.\,(w)(\mathrm{T}_n w \supset : w \in x\,. \equiv .\, w \in y)\,.\,x \in z\,. \supset .\, y \in z$

がえられる．

だが，§36 の (iv) および (v) から，多種類変項的量化論理によって導出可能なすべての定理が，また，(iii)—(ix) から一種類変項的論理によっても導出可能であることを確信できるであろうか？　多種類変項的論理の特徴的な法則 (§34 参照) は：

$$(y^n)((x^n)Fx^n \supset Fy^n), \qquad (y^n)(Fy^n \supset (\exists x^n)Fx^n)$$

であった．(vi) と (vii) によれば，いまでは，これらの意味するのは：

$$(y)(\mathrm{T}_n y \supset .\,(x)(\mathrm{T}_n x \supset Fx) \supset Fy),$$
$$(y)(\mathrm{T}_n y \supset .\,Fy \supset (\exists x)(\mathrm{T}_n x\,.\,Fx))$$

であり，したがって，一種類変項的論理に対してあきらかに妥当である．だが，多種類変項的論理には，われわれが見失ってはならないそれ以上のより微妙な能力源もまたあった．論理学のすべての学生が学ぶように，量化理論は，「$(x)Fx$」から「$(\exists x)Fx$」に至る推論

を許すことによって，変項の値域が空でないことを暗に仮定している．標準的な論理法則があらたにそれぞれの種類の変項に対して受けいれられているような多種類変項的論理においては，この暗黙の仮定の結果として，おのおのの種類の変項に対して値域の空でないことが，認められている推論によって保証されている，ということになる．したがって，一種類変項的論理に切りかえるに伴なって，以前には使うことのできたいくつかの定理が失なわれるべきでないならば，たしかに，おのおのの n に対する定理として，次式を用意しなければならない[1]:

(x) $$(\exists x)\mathrm{T}_n x.$$

証明. もし $(x){\sim}\mathrm{T}_n x$ ならば，(v) によって，$(x)\mathrm{T}_{n+1}x$，それゆえ，(viii) により，$(x)(x \in y \,.\!\equiv Fx)$ なる y がある，そこから，ラッセルの逆理がえられる．

さて，特別な変項を有するタイプ理論のすべての定理は，翻訳されて，一般的変項のタイプ理論において保存される．それにもかかわらず，その証明または反証をわれわれが用意していないようなあらたに有意味となった式のすべてからして，後の方の体系が前の方の体系よりも不完全であることは歴然としている．われわれがそれをいま描いているようなタイプ理論に対して，あきらかに妥当であるそのような式のいくつかは，次のようなものである：

(xi) $$x \in y \,.\!\supset .\, \mathrm{T}_n x \equiv \mathrm{T}_{n+1} y,$$

(xii) $$(\exists y)(x)(x \in y \,.\!\equiv .\, x \in z \,.\, Fx),$$

(xiii) $$(\exists y)(x)(x \in y \,.\!\equiv .\, x \in^2 z).$$

もし (xi) をさらに公理として受けいれるならば，(viii) および (ix) を：

(xiv) $$(\exists y)(\mathrm{T}_{n+1} y \,.\, (x)(x \in y \,.\!\equiv .\, \mathrm{T}_n x \,.\, Fx)),$$

(xv) $$\mathrm{T}_{n+1} x \,.\, \mathrm{T}_{n+1} y \,.\, (w)(w \in x \,.\!\equiv .\, w \in y) \,.\, x \in z \,.\!\supset .\, y \in z$$

と単純化できる．なぜなら，(viii) は：

$$(\exists y)(\mathrm{T}_{n+1} y \,.\, (x)(\mathrm{T}_n x \,.\, x \in y \,.\!\equiv .\, \mathrm{T}_n x \,.\, Fx))$$

と等値であり，その「$\mathrm{T}_n x \,.\, x \in y$」は，「$\mathrm{T}_{n+1} y$」があるときには，(xi) により「$x \in y$」に帰する．おなじ推理が (ix) を (xv) と等しくする．

1　この点は，Herbrand, 1930, 62 ページ，によって考慮された．つぎに続く証明は，David Kaplan と Bruce Renshaw に負う．

(xiv)からは，これと同様に，(xii)および(xiii)に近いものとしては：

(xvi) $(\exists y)(x)(x \in y . \equiv . \mathrm{T}_n x . x \in z . Fx)$,

(xvii) $(\exists y)(x)(x \in y . \equiv . \mathrm{T}_n x . x \in^2 z)$

をうるにすぎない．ここで「$\mathrm{T}_n x$」を消去し，したがって，(xii)と(xiii)を与えるであろう推理は，次の通りである：(xvi)において $\mathrm{T}_{n+1} z$ なるように n をとる，あるいは，もし $\mathrm{T}_0 z$ ならば，n を0にとる；そして，(xvii)においては，$\mathrm{T}_{n+2} z$ なるように n をとる，あるいは，もし $\mathrm{T}_0 z$ か $\mathrm{T}_1 z$ ならば，n を0にとる．だが，あらゆるもの z がどれかひとつのタイプに属するということを示す公理をわれわれはもっていないので，このやり方はわれわれには閉ざされている．そのような公理，あるいは公理型，を表現することさえ容易ではない；「$(\exists n)\mathrm{T}_n z$」でもうまくいかない，その「$n$」は型文字であり，それゆえ，量化子に認められることができないからである．だが，もし好むならば，(xii)および(xiii)自体を，公理型および公理として加えてもよい．

ツェルメロの先駆的な集合論におけるそれらの地位というのが，それであった．この集合論は，ラッセルのタイプ理論とおなじ年：1908年に始まる[2]．公理型(xii)は，**分出**(*Aussonderung*)もしくは**分離**(*separation*)の公理型として，§5から思い出されよう．(xii)がそうよばれるのは，クラス z が与えられると，それの部分 y を分離する効果をそれがもっているからである．公理(xiii)は，**和**(*sum*)の公理として知られている．ツェルメロの体系は，§39で見るように，その他の公理において，タイプ理論とはたしかに異なっている．

(xv)から，「$\mathrm{T}_{n+1} x$」と「$\mathrm{T}_{n+1} y$」を落すという問題が生ずる．これらは，二つの理由から必要である．それらが必要であるのは，ひとつには，x と y が個体であるのを防ぐためである．任意の個体 x および y は，メンバーを欠いているため，相互に同一視されるであろうし，もし(xv)が「$\mathrm{T}_{n+1} x$」と「$\mathrm{T}_{n+1} y$」なしに採用されたとしたならば，個体はすべてのタイプの空クラスと同一視されるでもあろう．それらが必要なのは，もうひとつには，タイプの同一性を保証するためであり，したがって，異なるタイプの空クラスを相互に同一視するのを防ぐためである．

「$\mathrm{T}_{n+1} y$」が(xiv)に必要なのは，空クラスの存在をあらゆるクラス-タイプに，おなじよ

2 双方の仮定は，1932年(444ページ)まで出版されなかった1899年の手紙の中で，Cantor によって予想されていた．

うに，保証するためである．その文節は，もし y がメンバーをもっているならば，事実余分である，というのは，y のタイプは，このとき，そのメンバーのタイプによって，文節「$T_n x$」において特定化されているように固定されるからである[3].

38. 累積的タイプとツェルメロ

このように，いったんタイプ理論が一般的変項でのべられると，重要な性質を有する単純化が示唆される．そこで，すべてのクラス-タイプの空クラスを同一視したいと仮定しよう．すると，上の(xv)にある文節「$T_{n+1}x . T_{n+1}y$」の二つの目的のうち，ひとつは消えうせるであろう．これらの文節の残りの目的，x と y がクラスであって，個体ではないことを規定するという目的は，それ以後，「$\sim T_0 x . \sim T_0 y$」によっても，同様に果される．「ϵ」によるところの「$T_{n+1}x . T_{n+1}y$」の複雑さは n とともに増すので，これは単純化である．

空クラスを同一視すれば，おなじように，(xiv)の「$T_{n+1}y$」を「$\sim T_0 y$」に変えることができる．したがって，(xiv)と(xv)は：

(i) $$(\exists y)(\sim T_0 y . (x)(x \in y .\equiv. T_n x . Fx)),$$

(ii) $$\sim T_0 x . \sim T_0 y . (w)(w \in x .\equiv. w \in y) . x \in z .\supset. y \in z$$

となる．(ii)はもはや公理型ではなく，単一の公理である．

空クラスを同一視することは，もとのタイプ理論と文字通りに矛盾することはない，このように新しく肯定された同一性は，もとの理論において有意味に肯定されたりあるいは否定されたりすることはできないであろうから．にもかかわらず，それは，タイプ存在論の直観的な像とは反する帰結，とりわけ：

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \in y . y \in z . x \in z)$$

を生ずる(なぜなら，z を $\{\Lambda\} \cup \{\{\Lambda\}\}$ ととれ)．たしかに，(i)と(ii)によって表現される体系はタイプ理論といちじるしく異なる．

(i)の文節「$\sim T_0 y$」は，Λ の存在を保証するために依然必要であるが，Λ は，(i)の次のケース：

---

3 この節の最後の数ページと，次節の最初の数ページとは，*Journal of Symbolic Logic* の編集者の好意的な許可によって，私の 1956 年の論文の 272—275 ページから，一部，翻案されたものである．

(iii) $$(\exists y)(\sim T_0 y \,.\, (x)(x \in y \,.\!\equiv\!.\, T_0 x \,.\, \sim T_0 x))$$

により与えられる．「$\sim T_0 y$」がなくても，(iii)はメンバーのない対象 y の存在をやはり主張するであろう；だが，これらの対象は，「$\sim T_0 y$」の場合にはそうでなかったであろうが，Λ というよりはむしろ単に個体であったかもしれない．(iii)における「$\sim T_0 y$」の目的は，要するに，個体を Λ から区別しておくことである．同様に，すでに見たように，(ii)の「$\sim T_0 x \,.\, \sim T_0 y$」の目的は，個体が Λ と，そして個体が相互に，同一視されるのを避けることである．だが，どのようにしてこれらのものを必要とせずにすませられるかを，われわれは§4から知っている．実際，われわれは，いま，フレンケルに従って，単純に個体なしですませることはできない，なぜなら，タイプ理論の下では，これは，無限クラスに，また，古典的な数論にも門戸を閉じるであろうからである(§39を見よ)．だが，われわれは，有利なことに，§4の他の手段：個体をその単一クラスと同一視するという手段を採用することができる．

タイプ理論を一般的変項へ転換するそもそもの最初に，継次的なタイプでない対象 x と y にもおよんでいる「$x \in y$」の補足的な解釈の必要に直面した．われわれは，すべてを偽とすることを選んだ．個体をその単一クラスと同一視するという，いま考察した手段は，すべてを偽とするということに対して，どちらかといえば，次のような例外を設けるということを含んでいる：x が個体である場合，「$x \in x$」を真とみなせ．いまでは，(i)と(ii)は：

(iv) $$(\exists y)(x)(x \in y \,.\!\equiv\!.\, T_n x \,.\, Fx),$$

(v) $$(w)(w \in x \,.\!\equiv\!.\, w \in y) \,.\, x \in z \,.\!\supset\!.\, y \in z$$

に帰着する．さらに，「$T_n x$」の定義は，個体の新しい考え方に適するように改訂されなければならない．「$x\mathrm{PT}y$」をとばして：

(vi) 「$T_0 x$」は「$(y)(y \in x \,.\!\equiv\!.\, y = x)$」を表わし，
「$T_{n+1} x$」は「$(y)(y \in x \,.\supset T_n y)$」を表わす，

と定義できる．タイプは累積的となる；すべての $m<n$ に対して，$T_m x \supset T_n x$.

250ページの(x)の証明は，これらの定義の下では使えない．われわれはいまや「$(\exists x)T_0 x$」を公理ととらなければならないが，それでも，「$(\exists x)T_{n+1} x$」を次のように証明できる：(iv)により，「Fx」に「$x \neq x$」をとれば，$(\exists y)(x)(x \notin y)$ がえられる，それゆえ，(vi)により，$(\exists y)T_{n+1} y$.

かくして，それが一般的変項をもつ累積的タイプ理論である．それは，(iv), (v),「$(\exists x)\ T_0 x$」，および定義 (vi) を有する．§37 の (xi) は落される；その半分は (vi) の中にあり，他の半分は累積的タイプに対しては偽である．だが，§37 の (xii) と (xiii) は，分出と和であったが，前と同様に，累積的タイプに対しても妥当する．それらを附加された公理ととることもできよう．

私がこれまであげていなかったもうひとつのツェルメロの公理は，**巾集合** (*power set*) の公理とよばれる．それは，クラス z のおのおのに対して $\{x: x \subseteq z\}$ を措定する，そして，それは，$\{x: x \subseteq z\}$ が $2^{\bar{\bar{z}}}$ 箇のメンバーをもつ，という事実に由来するところの名称を有する (§30 参照)．ツェルメロにとっては，個体はメンバーのないものであったから，彼は，巾集合公理を，実質的には，次のような形におかなければならなかった：

$$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv . x \text{ はクラスである} . x \subseteq z).$$

すべての個体がつきまとって y に入りこむことがないように，そこにはクラス性の文節があるのである．

一般的変項をもってはいるがそれ以上寛やかになってはいない §37 におけるようなタイプ理論においては，その考え方でせいぜい認めることができたであろうものは：

$$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv . T_n x . x \subseteq z)$$

である．同質性の文節「$T_n x$」は，すべてのタイプの空クラスとすべての個体とがつきまとって y に入りこむことのないために，必要なのである．($n=0$ のときは，すべての個体は，実際，y に入る；だが，そのときはそれ以外のいかなるものも入らない．) 私が §37 でこの法則のために立ちどまることのなかったのは，それがその節の (xiv) から直接的にえられるからである．

しかしながら，個体がメンバーをもたないものではなくなった現在，y を個体の氾濫から守るのに，「$T_n x$」はもはや必要ではない；そして，すべてのタイプの空クラスが同一視される現在，「$T_n x$」は，もはや，それらの氾濫をせきとめるのにも必要でない．われわれは，累積的タイプ理論に対しては，ツェルメロをさえいっそう寛やかにするところの，防壁のない巾集合の公理：

$$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv . x \subseteq z)$$

を，平静に採用することができるであろう．

このように補足された公理体系は，もっと洗練されたものにできる．そうする前に，わ

われわれの記法を改良しよう．いま，「$x \in \{y: Fy\}$」の非関与的な定義 2.1 を，§36 の (i) に優先して再び活用し，したがって，仮クラスの自由を再び獲得するのが便利であろう．実際，これまでの諸章の小数番号のついたすべての定義は，再び活用することができる．個体は自分自身をメンバーとしてもつ現在，同一性の定義 2.7 さえも，まったく申し分がない．そこで，これまでに集められている公理型と公理，すなわち，(iv), (v)，巾集合公理，および，§37 の (x), (xii) と (xiii) は，次のような圧縮された形をとる：

$$\alpha \cap \{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho, \qquad x = y \,.\, x \in z \,.\supset.\, y \in z,$$
$$\{x: x \subseteq z\} \in \mho, \qquad (\exists x)\mathrm{T}_0 x, \qquad z \cap \alpha \in \mho, \qquad \bigcup z \in \mho.$$

さて，ここでの公理型「$\alpha \cap \{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」のかわりに「$\{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」をとることもできるであろう；なぜなら，「$\{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」は，$\alpha = \{x: \mathrm{T}_n x\}$ とおけば，「$\alpha \cap \{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」から結果するし，逆に，「$\alpha \cap \{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」は，「$\{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」と分出の公理型「$z \cap \alpha \in \mho$」とから結果するからである．そして，こんどは，「$\{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」のかわりに「$\{x: \mathrm{T}_0 x\} \in \mho$」を要請するだけで十分である；というのは，これと巾集合公理「$\{x: x \subseteq z\} \in \mho$」と「$\mathrm{T}_{n+1} y$」の定義とから「$\{x: \mathrm{T}_1 x\} \in \mho$」をうるし，このように続けていけば，われわれは，どんな n に対しても「$\{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$」まで上ってゆくからである．さらに，このようにして，「$\mathrm{T}_0 x$」というひとつのケースを除いては，「$\mathrm{T}_n x$」という記法形式を使わないというところまでわれわれの公理を下げてゆくと，われわれは，その形の記法すべてとその定義 (vi) とを跳ばしてよいし，さらに，そのひとつのケースに対しては，「$x = \{x\}$」に戻ってもよい．そこで，われわれの公理体系はこのようになる：

$$x = y \,.\, x \in z \,.\supset.\, y \in z, \qquad (\exists x)(x = \{x\}),$$
$$\{x: x = \{x\}\}, \{x: x \subseteq z\}, z \cap \alpha, \bigcup z \in \mho.$$

だが，タイプが累積的である現在では，ツェルメロのもうひとつの公理は附加される資格をもっている：$\{x, y\} \in \mho$，**一対化公理** (*axiom of pairing*)．通常の排他的なタイプ理論に対しては，これは一般には真でなかった；だが，それは累積的タイプ理論には適合する，任意の二つのものはおなじ累積的タイプに属しているからである．

公理「$\{x, y\}, \bigcup z \in \mho$」の帰結は，$x \cup y \in \mho$ ということである；なぜなら，z を $\{x, y\}$ にとればよい．ここにも，再び，通常のタイプ理論に対しては成りたたないが，累積的タイプに対しては成りたつものがある．

累積的タイプに対して，いま集めてきた公理は，便宜上，二つのリストにまとめ直されてもよい．巾集合，一対化，分出，和，外延性といった**ツェルメロの公理**がある：

(vii)　　$\{x: x \subseteq z\}$, $\{x, y\}$, $z \cap \alpha$, $\bigcup z \in \mho$,　　$x = y \,.\, x \in z \,.\supset.\, y \in z$,

そして，**個体公理**(*axioms of individuals*)がある：

(viii)　　$(\exists x)(x = \{x\})$,　　$\{x: x = \{x\}\} \in \mho$.

ツェルメロは，彼の体系をタイプに配列されたものとしては描かなかった．それでも，この径路を通じて彼の体系に移行することは，これら二つの先駆的な体系を関係づけるのに役だつ．

ツェルメロは，二・三の附加的な公理を認めた．彼が創設し公理に数えた選択公理と，§39でわれわれがとりあげるであろう無限公理(axiom of infinity)とがあった．また，「$\{x\} \in \mho$」があったが，「$\{x, y\} \in \mho$」が「$\{x, x\} \in \mho$」を与えるので，これは余分であった．また，「$\Lambda \in \mho$」もあったが，これは，分出公理型「$z \cap \alpha \in \mho$」の「$z \cap \Lambda \in \mho$」というケースからえられる．

巾集合公理が最初に議論に上ったとき注意したように，ツェルメロの実際の体系は，クラスと個体とのあいだの区別によって複雑となっていた．それゆえ，巾集合公理の最初の定式化にクラス性の文節があったのである．同様に，外延性の公理「$x=y \,.\, x \in z \,.\supset.\, y \in z$」において，ツェルメロは，「$x$」と「$y$」をクラスに限定しなければならなかった．ツェルメロにとって，「$\Lambda \in \mho$」に対応するものは，むしろ，

$$(\exists y)(y \text{ はクラスである} \,.\, (x)(x \notin y))$$

という趣旨のものであり，それゆえ，個体がメンバーのないものであるかぎりでは余分のものではないと，ツェルメロのためには言われねばならない；分出は，メンバーのない対象を保証したが，必ずしもメンバーのないクラスを保証したのではない．このような面全部を $x=\{x\}$ としての個体という私の概念によって単純化している点では，私はツェルメロから離れてきた．

予めツェルメロの体系に精通していた読者は，2.1と非関与的な抽象とを私が用いていることに伴なって現われてくる提示法上の徹底的な相違をも斟酌しなければならなかったであろう．ツェルメロの体系は普遍クラス $\mho$ を認めなかったし，クラスなしのクラス記号はツェルメロにとって無用であった；したがって，分出の「$z \cap \alpha \in \mho$」という私の表現方法は，その「$\mho$」と「α」の双方で，実際，彼および彼の読者には奇妙に見えるであろう．

文献上で特徴的な分出の表現法は，むしろ，§37の(xii)である．(それさえも，一部は，スコーレム(1922—23)によるものであって，彼はその「Fx」の型としての身分については，ツェルメロより明確であった.) だが，仮クラスと非関与的な抽象ということ全体は，それが便利でしかも大きく不気味に映っているというものの，純粋の定義である，ということに留意されなければならない；ツェルメロの体系は，このようにのべられたとき，けっして他の体系になるのではない.

そこで，(vii)の表にあげられているものは，提示法の上では徹底的に修正されているが，内容的には，個体観念の改訂と，余分のものとともに無限と選択という高性能の公理を排除することによって修正されているにすぎないところのツェルメロの公理である．(viii)の表にあげられているのは，ツェルメロにはない余分のもの：個体公理，である．これらは，私の特殊な個体説によって変形されて，タイプ理論の申し子として入ってきたものである．ツェルメロ自身の体系は，私の個体観にせよそれ以外のものにせよ，どのような意味の個体にしろ，個体を許しているにすぎないのであって，それを要求しているのではない.

ツェルメロの体系は個体を必要とせず，ただ，『純粋な』クラスだけを必要とするというフレンケルの註釈(§4)は，公理(vii)に関するかぎりでは，それを強めることができる：そこではただ有限の純粋なクラスだけが必要である．これらは，§36でタイプ理論の無矛盾性をわれわれに保証してくれたトリヴィアルなモデルに属するクラスである．したがって，ツェルメロの公理(vii)の無矛盾性は保証されている．また，個体公理(viii)を加えることから矛盾が生ずる恐れもない；一箇の個体がその要求を満たすであろうからである.

通常そうよばれているタイプ理論からこのように離れてきたので，ラッセルの逆理とカントールの逆理がいまではどうなるかを見て，われわれの位置づけをしよう．ラッセルの逆理における矛盾というのは，一言でいえば，「$\{x: x \notin x\} \in \mho$」である；そして，それをうる望みというのは，ただひとつ，「$z \cap \{x: x \notin x\} \in \mho$」を与える分出〔公理〕型「$z \cap \alpha \in \mho$」によることであろう．だが，これから「$\{x: x \notin x\} \in \mho$」に至るには，$\{x: x \notin x\} \subseteq z$ なるほど十分大きな z が必要であり，そのような z に至る明らかな方法はない．逆理に対するツェルメロの防衛法は，本質的には，大きすぎるクラスを避けることである.

カントールの定理はそのような障害に出会わない．分出〔公理〕型「$z \cap \alpha \in \mho$」は，

(ix)　$$(z)(w)(z \cap \{y: y \notin w‘y\} \in \mho)$$

を与え，これから，ちょうど28.17におけるのとおなじようにして，

$$(z)(z \prec \{x: x \subseteq z\})$$

を結論できる．だが，ここの z を $\mho$ にとることから生ずるであろうカントールの逆理については，なんの危険もない；なぜなら，われわれは $\mho \in \mho$ をもっていないからである．おのおのの n に対して $\mho^{n+1} \in \mho$，すなわち，$\{x^n: x^n = x^n\} \in \mho$ を証明できる，なぜなら，これは，単に，$\{x: \mathrm{T}_n x\} \in \mho$ ということをいうことであり，そして，これは，もし(viii)によって補足されるならば，ツェルメロの公理(vii)からすぐえられるのを見たからである；だが，「$\mho \in \mho$」もしくは「$\{x: x=x\} \in \mho$」については，証明する方法がない．ここにも，再び，逆理に対するツェルメロの防衛法が大きすぎるクラスを避けることにある，のが見られる；あらゆるもののクラスは存在しない．

カントールの定理は，ちょうどいま証明した形においては，「$\prec$」の普通の定義に依存していた；§36 におけるように，異質な関係に対する特別な処置は必要でなかった．なぜなら，累積的なタイプへ切りかえることの効果は，異質な関係についての禁止が消えること，あるいはそういってもよいが，異質性そのものが消えることである，というのは，任意の二つのタイプのうちの一方は，いまや，他方のうちへ含まれているからである．決定的な点は，すでに手中にある「$\{x, y\} \in \mho$」であって，それは，すべての z と w に対して「$\langle z, w\rangle \in \mho$」を与える．

累積的タイプについて語ることは，ある点では，混乱をまねく．一義的にあるクラスの**その**タイプ(*the* type)について話すことができなくなっている．さらに，ひとつのタイプは**より低い**タイプをすべて含むのに反して，任意のタイプのものは**より高い**タイプのすべてに属する．したがって，あるクラスの**その**タイプとは，これまで累積的な意味でのその最低のタイプとよばれてきたものである，と定義し直す方が良いかもしれない．かくして，個体はタイプ 0 であるといわれるであろう；空クラスはタイプ 1 であるといわれるであろう；そして，他のどんなクラスも，その最高のタイプのメンバーより次に高いタイプに属する，といわれるであろう．この考え方によれば，(vi)における「$\mathrm{T}_n x$」は，「x はたかだかタイプ n に属する」と読まれるであろう．タイプの累積性であったものは，そのかわりに，クラスの有限な異質性：クラスのメンバーは有限に多くの相異なるタイプ(すなわち，それ自身のタイプより以下の任意のタイプ)に属することが許される，として記述されるようになるであろう．しかしながら，このこと全体が，まさに，クラスのひとつの，そして，おなじ理論：(vii)および(viii)において要約された理論，を記述するもうひとつの方法に他ならない．

どちらがその理論のより便利な呼称であるにせよ，たしかに，その理論自体は普通のタイプ理論にまさる便利さを示している．この例証を，順序対，そして，それゆえ，異質な関係を無制限に許している，ということのうちにわれわれは見たのである．また，フォン・ノイマン版およびツェルメロ版の自然数が，ここでは，ラッセルのタイプ理論の下でよりも少しばかりうまくいくことも注意されてよい．フォン・ノイマンにとっては，x の後続者は $x \cup \{x\}$ であったが，それはあきらかにタイプ理論に抵触する．そして，ツェルメロ版は，二つの数，たとえば，x とその後続者 $\{x\}$ を，ひとつのクラスに入れようとするや否や，タイプ理論に抵触する．有限な異質性をクラスに許すことに伴なって，その新方式は，これらフォン・ノイマンおよびツェルメロの数と抵触しないですむのである．

39. 無限公理その他

タイプ理論は，フレーゲ方式の数についてさえうまくいかなかった．この困難を見通すために，§12からの要点をひとつ思いおこそう．古典的な自然数論にとって必要なすべては，つねに自分自身の結果に適用されて，なにか新しいものを与える任意の関数 S である，ということがそこで分った．0 の役割を演ずる S の任意の独立変項をとろう，すると，数論のその他のすべての附属物は，§11 で見られた一般的なきまりきった手順で定義できる．だが，もし S がその都度新しいものを与えることができなければ，数論の要求は満足されないであろう．そして，実は，この失敗がまさしくタイプ理論の下でフレーゲの S を脅やかしているのである．

なぜなら，数 x のフレーゲ的な後続者は，

$$\{z : (\exists y)(y \in z \,.\, z \cap {}^{-}\{y\} \in x)\}$$

である；そして，S‘$x = x$ を妨げるのはなんであろうか？ 仮に，数に対する最低のタイプ，すなわち，タイプ 2 で考えているとして，それゆえ，ある数，たとえば 5 が，五箇の個体をもつクラスすべてのクラスであるとしよう．そして，〔議論〕領域には五箇の個体しかない，と仮定しよう．かくして，5 はタイプ 2 における $\{\mho^1\}$ である．すると，タイプ 2 における 6 または S‘5 は，

$$\{z^1 : (\exists y^0)(y^0 \in z^1 \,.\, z^1 \cap {}^{-}\{y^0\} = \mho^1)\},$$

であるが，「$y \in z \,.\, z \cap {}^{-}\{y\} = \mho$」は矛盾しているので，これは Λ^2 である．しかし，また，7 あるいは S‘6 は S‘Λ^2 であるが，これもまた Λ^2 に帰する．したがって，個体が五箇以上

ないものと仮定すれば，x がタイプ 2 の 6 である場合，$\mathrm{S}`x=x$ である．

この議論は一般的である．もしあるタイプのメンバーが k 箇以下ならば，二つ上のタイプの数 k は，自分自身の後続者に等しい(双方とも Λ である)であろう．このような状況では，初等数論は崩れ去る．とくに，ペアノの減法の公理「$\mathrm{S}`x=\mathrm{S}`y.\supset.x=y$」は成りたたない．そこで，$5\neq\Lambda$ ではあるが，$\mathrm{S}`6=6=\mathrm{S}`5=\Lambda$ という前の例をとろう；ここでは $\mathrm{S}`6=\mathrm{S}`5$，しかも $6\neq5$ である．

その最悪な点というのは，ひとつのタイプがそのメンバー性において有限ならば，おのおののタイプが有限になる，ということである；そして，そのとき，本来の算術はどのタイプでもえられそうにない．とにかく，この表現法に基づいて算術を維持してゆくためには，無限に多くの個体を要請することが必要かつ十分である．この**無限公理**(*axiom of infinity*) のひとつの表現方法は，そのメンバーのおのおのがそれ以上のあるメンバーの部分クラスであるような空でないクラス x^2 が存在する，とのべることによるものである[1]．

$$\text{(i)}\qquad (\exists x^2)((\exists y^1)(y^1\in x^2)\,.\,(y^1)(y^1\in x^2\,.\supset(\exists z^1)(y^1\subset z^1\in x^2))).$$

この公理は，無限に多くの個体が存在するかどうかという問いが数学というよりは，むしろ，物理学あるいは形而上学の問いであり，そして，算術をこれに依存させるのはそぐわないという理由で，非難されてきた．ホワイトヘッドとラッセルは，選択公理に対すると同様に，この公理についても弁解がましい態度をとった；VII—X 章において，大抵の包括化仮定に対して私がしたように，彼らは，二つの公理双方を，それらを必要とする定理に公然の仮説として入れたのである．

タイプ理論を，§38 のように寛やかにして，累積的タイプもしくは有限に異質なクラスを許すときでさえも，この無限公理の必要というのは，数のフレーゲ的説明を悩まし続ける．なぜなら，このように寛やかにされている任意のタイプ内においても，もし無限に多くの個体が存在しなければ，あるクラスがどれだけ大きいものでありうるかについて有限の限界があるであろう．

そのとき，もし寛やかにされた理論が，そのかわりに，ツェルメロの数概念に訴えるのをわれわれに許してくれる，ということを慰めだとわれわれが思うならば，突然，この慰めは，こんどは，とどのつまり数学的帰納法に関する困難という形で終る．古典的には，

1　この表現法は，Tarski, 243 ページ，からとられた．Whitehead and Russell は，それをむしろ，あらゆる $x^2\in\mathrm{N}^3$ に対して x^2 箇のメンバーをもつクラス y^1 がある，というように表わした；要するに，$\Lambda^2\notin\mathrm{N}^3$．

(ii) 「N」は「$\{x:(y)(0 \in y . \mathrm{S}``y \subseteq y .\supset. x \in y)\}$」を表わす

と定義し，それから，y を $\{z: Fz\}$ にとって，

(iii) $$F0 . (z)(Fz \supset F(\mathrm{S}`z)) . x \in \mathrm{N} .\supset Fx$$

を推論する．今までにおなじみになっていた困難というのは，一般に $\{z: Fz\} \in \mho$ という保証がないということである．

われわれは，IV章では，(ii)を改訂して：

(iv) 「N」は「$\{x:(y)(x \in y . \check{\mathrm{S}}``y \subseteq y .\supset. 0 \in y)\}$」を表わす，

と読み，それから，y を $\{z: Fz\}$ ではなくて，有限クラス $\{z: z \leqq x . \sim Fz\}$ にとることによって(iii)を証明するということで，この困難を克服した．7.10 および 13.1 において，有限クラスを要請したし，万事申し分がなかった．さて，この手段は，寛やかにされたタイプの，もしくは，ツェルメロの，現在の体系にも等しく効果があると期待される，なぜなら，ここでは，再び，すべての有限クラスはその存在が保証されているからである．「Λ, $\{z\}, x \cup y \in \mho$」のすべてがどのようにして§38の(vii)から生ずるか，をわれわれは見ている；後の二つは「$x \cup \{z\} \in \mho$」を与えるし，「$\Lambda \in \mho$」から「$x \cup \{z\} \in \mho$」を n 回適用して n 箇のメンバーの任意のクラスが存在することを示すことができる．しかしながら，実際には，これは解決ではない．(iv)から一般に(iii)をうるのにわれわれが必要とするものは，

$$x \in \mathrm{N} .\supset. \{z: z \leqq x . \sim Fz\} \in \mho$$

ということの一般的証明である．分出〔公理〕型「$y \cap \alpha \in \mho$」からこれをうるのにわれわれが必要とするものは，

$$x \in \mathrm{N} .\supset. \{z: z \leqq x\} \in \mho$$

ということの一般的証明である．これのためにわれわれが必要とするものは，数学的帰納法である！ われわれは堂々めぐりをしていたのである；あるいは，もしわれわれが前進したとすれば，証明されていない帰納法の型(iii)を証明されていない単一の文に還元するという程度に前進したのにすぎない．

•ツェルメロは，彼自身の無限公理——要するに，「$\mathrm{N} \in \mho$」，実際には，これ：

(v) $$(\exists x)(\Lambda \in x . (y)(y \in x .\supset. \{y\} \in x))$$

を採用することによって，これらすべてを切り捨てる．これは，少くともツェルメロの意

味でのすべての自然数がそれに属するようなクラスを要請している．それは，「N∊𝔙」と等値である；なぜなら，N それ自身は(v)を満足する x であり，そして，逆に，もし x が(v)を満足するならば $N \subseteq x$ であり，したがって，分出によって N∊𝔙 だからである．

さて，もちろん，帰納法の型(iii)は結果する；(ii)の y を「N∊𝔙」と分出とによって存在する $N \cap \{z: Fz\}$ にとりさえすればよい．帰納法に対するツェルメロの方法とはこのようなものであった．

もし「N∊𝔙」が帰納法に対する基礎として法外なものであったとしても，それは実数に対する最小の準備以上のものではほとんどない(§19参照)．そして，それは，ホワイトヘッドとラッセルのものとは異なり，個体についてはなにも語らない無限公理である．

だが，それはタイプ理論との最後の結び目を断ち切る．ツェルメロのたぐいの，あるいはフォン・ノイマンのたぐいの自然数の無限クラスというのは，累積的でさえあるタイプ理論とも対立的である；なぜなら，そのようなクラスは，タイプの最高限度(ceiling)をすべて突き破るからである[2]．実際，累積的でさえあっても，タイプ理論が，ツェルメロもしくはフォン・ノイマンのたぐいの自然数を興味をひく程度に供給した，などということは，端的にいって，真実ではなかった；なぜなら，数の無限クラスの仮定を延期しているときでさえも，われわれは，たしかに，数の無限クラスへの道を閉じたいなどとは思っていなかったであろうから．

ホワイトヘッドとラッセルの無限公理は，われわれの見たところでは，減法の法則「$S‘x = S‘y . \supset . x = y$」によって喚起された．言い方を変えれば，自然数が急にとまるといけないから，それが必要とされたのである．同様に，実数が急にとまるといけないから，それが必要とされたのである．そして，その意味はそれに止まるものではない．後続するタイプのおのおのは，その先行者のすべての部分クラスのクラスであり，したがって，カントールの定理により，その先行者より大きい．それゆえ，無限に多くの個体を仮定しよう，そうすれば(§38の(iv)を仮定して)，あなたは際限なくより高い無限性を仮定している．

ホワイトヘッドとラッセルの無限公理が減法と実数との要求によって喚起されたのに反して，ツェルメロの無限公理は帰納法と実数との要求によって喚起された．そして，ツェルメロの無限公理は，彼の体系において，ホワイトヘッドとラッセルの無限公理が彼らの体系においてもっていたのとおなじ意義をより高い無限性に対してもっていた．なぜなら，

2 私は有限の高さのタイプについて語る．von Neumann による超限タイプというアイディアは，§45のはじめに現われるであろう．

$\mathrm{N} \in \mathcal{V}$ が与えられると，§38の(vii)にある巾クラス公理によって，$\{x: x \subseteq \mathrm{N}\} \in \mathcal{V}$ ということをうる；そして，それは，カントールの定理により，N より大きい．そして，より上のものについても同様．

ツェルメロの無限公理はタイプの最高限度をとり払う．それら最高限度をとり払うことはうまい手であり，たとえ指標自体がすでに無くなっていたとしても，タイプの指標に匹敵する重荷からわれわれを解放してくれる．というのは，一般的変項をもっていても，タイプ理論の下では，フレーゲ方式の自然数にわれわれは追いやられたからである．これは，(個体のクラス以上の)あらゆるタイプにおける異なる5，(個体のクラス以上の)あらゆるタイプにおける異なる6，(個体のクラス以上の)あらゆるタイプにおける異なる N を認めることを意味していた．そして，そこでは，実数論のあらゆる細部のおなじような重複がタイプの階層を通じて上の方へとひき続きおこる：$\frac{3}{5}$ は，後続するタイプのおのおのにおいて，異なるものとして現われるし，π も，Rat 自身も，そして Real もそうである．基礎的な記法を一般的変項に還元したにもかかわらず，タイプの指標の保存は，とくに，これらすべての定項に対して，実際上必要なのである．他方，その無限公理をもち，それに続いてタイプの最高限度を放棄したツェルメロの体系においては，このような重複はすべて止む．

逆理に対するツェルメロの防衛法が大きすぎるクラスを避けることにあることを，われわれは見た[3]．クラスは，存在するすべてのものより大きいであろうときにかぎって，存在しない，という逆の保証に対しては，ツェルメロの分出〔公理〕型にほんの部分的な規定があるにすぎなかった．完全な規定は，むしろ，フレンケルとスコーレムによって，置換公理型においてつけ加えられたのである．仮クラスと非関与的な抽象という技術によって圧縮されると，その〔公理〕型は，すでに§13で注意したように：

(vi) $$\mathrm{Func}\,\alpha \supset . \alpha``x \in \mathcal{V}$$

となる．

これは，タイプ理論が忠実に守っているような原理ではない．通常の，あるいは，排他的なタイプ理論においては，メンバーが二箇程度に少ないクラスもタイプの相違のゆえに禁止されることもあるのに，一方，無限クラスがひとつのタイプ内で存在することもある．

3 §38. 大きすぎるクラスを避けることによって逆理を避けるというアイディアは，Zermelo の体系よりもはるかに古い．それは，1906年の論文において，Russell によって，また，長いあいだ未刊だった1899年の書簡において，Cantor(444ページ)によって述べられていた．

そして，累積的タイプ理論においてさえ，ある無限クラスはタイプの無限上昇のゆえに禁止されることがあるし，一方，そのような性質をもたない他の無限クラスは認められている；したがって，ここでも，置換公理型は場違いであろう．

タイプ理論がツェルメロおよびフォン・ノイマンの数に面倒をおこすのを，われわれは見た．また，われわれは相互的な両立不能性を認めねばならない：ツェルメロの集合論はフレーゲの数に面倒をおこす．なぜなら，もしフレーゲの数がタイプという考え方なしに解釈され，その結果，n が，単に，どんな対象にせよ，それら対象の n 箇のメンバーのクラスすべてのクラスであるならば，0以外の任意の数は $\mathfrak{V}$ 自身とおなじくらい多くのメンバーをもつであろう；そして，そんなに大きいクラスは，(置換公理型(vi)をもつ)ツェルメロの体系においては存在できない，というのは，その存在は(vi)により $\mathfrak{V}$ の存在を促がすであろうから．そこで，すべての単一クラスのクラス $\iota``\mathfrak{V}$ であるフレーゲの1だけをとろう；われわれは $\iota``1=\mathfrak{V}$ を有する，したがって，もし $1\in\mathfrak{V}$ なら，(vi)により，$\mathfrak{V}\in\mathfrak{V}$．そこで，ツェルメロとフォン・ノイマンの数がそのかわりに無条件で利用できるようになることを，われわれはたいへんに感謝してよい．

置換公理型(vi)が採用されると，分出公理型「$x\cap\alpha\in\mathfrak{V}$」が余分のものとして省かれることに注意されたい．なぜなら，(vi)の α を関数 $I\restriction\alpha$ にとると $(I\restriction\alpha)``x\in\mathfrak{V}$ をうるが，これは $x\cap\alpha\in\mathfrak{V}$ をいうことである．公理のそれ以上の簡略化については，もし(vi)を複雑にして：

$$\mathrm{Func}\,\alpha\supset\alpha``\{y:(\exists z)(y\subseteq z\in x)\}\in\mathfrak{V}$$

と読むならば，「$x\cap\alpha\in\mathfrak{V}$」だけではなく，「$\bigcup z\in\mathfrak{V}$」と「$\{x:x\subseteq z\}\in\mathfrak{V}$」とを余計なものとして落せることが小野によって示されている．小野の〔言明〕型は，一対化，あるいは「$\{x\}\in\mathfrak{V}$」が与えられると，これらの公理および(vi)と等値である．

置換公理型(vi)およびツェルメロの無限公理(v)，もしくは「$\mathrm{N}\in\mathfrak{V}$」，の双方は，ツェルメロの体系が，その寛やかにされた累積的な形でさえあっても，タイプ理論から相異するということを印づけている法則であるのを，われわれは見た．逆に，個体公理，§38の(viii)，は，いったんツェルメロの体系がその力を延ばしてゆくところのこれら異なる道をとるときには，この体系ではなんの目的も果さないようなタイプ理論の変形された痕跡である．

後継者たちによってツェルメロの体系には二つのよく知られた追加がなされたが，置換公理型は，そのうちのひとつである．他は，フォン・ノイマンの**基底づけ**(*Fundierung*),

あるいは**規則性**(*regularity*)の公理:

$$(x)(x \neq \Lambda . \supset (\exists y)(y \in x . x \cap y = \Lambda)),$$

あるいは，われわれのいくつかの省略形を利用すれば，「Fnd $\mathfrak{E}$」である．これは，20.4 で見たように，$(z)(z \notin z)$ を含意する．さらに，それは，メンバー性に関して，繰りかえしであろうとなかろうと，際限のないどんな下降をも禁ずる[4]．あきらかに，その帰結「$(z)(z \notin z)$」だけからしても，それは，$x=\{x\}$ という個体の理論をもつわれわれに組するものではない．そして，たとえ，われわれが，これの意味での，またはなんらかの意味での個体に予め悪態をついておく決心をしたとしても，「Fnd $\mathfrak{E}$」は他の点では依然として拘束である．それは，たとえば，$\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ を，また $^{-}\{x\} \notin \mathfrak{V}$ をも，また $^{-}\mathrm{N} \notin \mathfrak{V}$ をも含意する，というのは，これらのクラスのおのおのは，もし存在したとするならば，自己のメンバーとなったであろうから．

ただし，これらの存在しないことは，ツェルメロの他の公理によって，いずれにせよ含意される．そして，基底づけ公理はいくつかのステップを省いてくれる；それは，われわれの「NO」の定義 22.15 とそれに関連したいくつかの証明を短縮したであろうし，13.20 で必要とされた前提「$x \in \mathrm{N}$」から「$\sim(x<x)$」を解放してくれたでもあろう．それは，事態を処理するひとつの方法であり，知られているいろいろの集合論的な考案のひとつである．もしそれが予め排除しているクラスが要求されないならば，それを一掃するのは，愉快なくらいすっきりしている．他方，それ自体の望ましい性質をもった包括化原理が基底づけ公理と抵触するならば，この公理が成立するという先天的な理由はなにもない．

基底づけ公理以上にさえも進んで，むしろ，それに対応する公理型:

$$\alpha \neq \Lambda . \supset (\exists y)(y \in \alpha . \alpha \cap y = \Lambda)$$

を採用してもよい．おなじことに帰着するもうひとつの公理型は:

---

4 この帰結もまた，**基底づけ公理**(*Fundierungsaxiom*)，または，そのより弱い形，とよばれる．Mendelson はそのより強い形を制限公理(axiom of restriction)とよんでいる．それらは，選択公理を用いれば，等値なることが証明されるが，選択公理を用いなければ，その体系が矛盾しないかぎり，等値でない．Mendelson，201 ページ以下を見よ．際限のない下降を排除するというアイディアは Mirimanoff(1917)に発する．彼は，この制限を直接的な公理によって課することはせず，一歩退いて課した: $\bigcup x$，$\{y: y \subseteq x\}$，およびその他同類のものの存在を準備する彼の公理は，メンバー性に関して際限のない下降を抱かないクラス x に限定されていた．von Neumann は，1929 年の彼の体系内部でこの公理にその一般的な定式化を与えて，もし彼の体系が前もって無矛盾ならば，この公理をつけ加えても無矛盾であることを示した．(また，von Neumann, 1925, §VI を見よ.) Zermelo は，それを 1930 年に彼自身の体系につけ加えた．

$$\{x: x \subseteq \beta\} \subseteq \beta . \supset . \beta = \mho$$

であるが，$\bar{\alpha}$ を β と考えれば，それは理解されよう.

少し前に二度ばかり，有限集合における単純なモデルを引用して，発端をなす集合論の無矛盾性の証明を挙げた. この特定のモデルは，タイプ理論のものにせよ，ツェルメロの体系の「N $\in \mho$」にせよ，いったん無限公理が採用されると，閉め出される. 無矛盾性がより疑わしくなればなるだけ，無矛盾性の証明はより急を要するようになる. だが，それらは，また，よりいっそう困難になり，よりおぼつかないものになる. 無矛盾性の証明がそれに訴える装置が精巧なものであればあるほど，その装置自体の無矛盾性を問う余地が大きくなり，したがって，その装置がそれを確立するのに用いられていた結論を問う余地も大きくなる. 集合論のより不確実な公理化において，無矛盾性の証明についてわれわれが普通望みうるのは，せいぜい，もしもうひとつのもう少し信用できる体系が無矛盾ならば，そのような体系のあるものは無矛盾である，という証明である. われわれはこの種のものをいくらか§44 で見るであろう.

XIII. 層別化と究極クラス

40.『新基礎』(New foundations)

ツェルメロの体系，とくに，置換公理型をつけ加えたツェルメロの体系においては，クラスの存在がサイズの問題であるのをわれわれは見た．かくして，$\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$．さらに，$(x)(\bar{x} \notin \mathfrak{V})$；というのは，さもなければ，$x \cup \bar{x} \in \mathfrak{V}$，したがって，$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$．かくして，領域はクラスのブール代数の関数に関して閉じていない．ブール代数は，相対化されて初めて生き残るにすぎない(§33)；クラス x は，補クラスとして，$\mathfrak{V}$ ではなくて任意のクラス y に相対的に，$y \cap \bar{x}$ をもつにすぎない．おなじような状況が，事実，タイプ理論の下でも認められたが，そこでは，それはそれほど顕著ではなかった，タイプのおのおのはブール的な演算の下では閉じていたし，タイプを超えるクラスという考え方は，当然のことながら，閉め出されていたからである．

ツェルメロの体系は，その主要な輪郭においては，一般的変項と累積的タイプとへ切りかえることによって，タイプ理論から(歴史的にではないが，XII 章において)生じた．ところで，タイプ理論から離れる別の方法もある．このもうひとつの別のやり方を用意するために，タイプ理論が逆理を排除したのはどのようにしてであったかを，二つの段落にわたって反省してみよう．

包括化の法則：

$$(\exists y)(x)(x \in y . \equiv Fx) \qquad \text{(i)}$$

が，一般に，逆理を避けるために制限されるところのものである．しかしながら，タイプ理論においては，論理そのものが，多種類的変項の形に弱められた；このとき，(i)について要求されたものは，他の式についてと同様に，「ϵ」の両脇にはつねに継次的に上昇する指標をもつ変項がつく，ということだけであった．あるいは，タイプの多義性の下では，その要求は，「ϵ」の両脇がこういった具合に固められるように指標を補なう方法がある，ということであった．指標をもたない式は，もし，それがこのように構成されるならば，すなわち，指標を補なって「ϵ」がつねに継次的に上昇する指標のあいだに現われるようにする方法があるならば，それを，**層別化されている**(*stratified*)とよぶことにしよう．

したがって，(タイプの多義性を有する)タイプ理論が包括化の法則に課する明白な制限

というのは，その〔法則の〕あらゆる個別例が層別化されている，ということである．これと等値に，制限をもっと狭めてのべることができる：それは，包括化の法則における「Fx」に代入される式が層別化されている，ということである．これが等値である理由は，「Fx」によって表わされる式が層別化されているときはいつでも，「x」に与えられるよりも次に大きい指標がつねに「y」に与えられるので，「$x \in y . \equiv Fx$」も層別化されているからである．「y」につねにこの指標が与えられうる，という理由は，「y」が「Fx」によって表わされる式に再び現われない（とにかく，自由では現われない，もし束縛されているならば，それは改名できる），ということである．そして，最後に，「y」が(i)の「Fx」によって表わされる式の自由変項ではない，という理由は，§1の中頃にある代入についての注意を乗りこえてきたすべての読者には明らかである．

結局，タイプ理論からそれるもうひとつの別のやり方というのが頭に浮ぶが，それは次のようである：指標のついていない変項を（タイプの上で多義的である，というよりは，むしろ）真に一般的な変項として解釈するが，しかし，(i)については，「Fx」に代入される特定の式は層別化されていなければならない，という制限を守る．これが，私がそれを提案した論文の標題から，『NF』，『新基礎』(New foundations) とよばれる体系である．それは，外延性の公理，および，層別化された「Fx」に対する公理型(i)だけを有している．個体の表現法は，再び，$x=\{x\}$ であり，「$x=y$」の定義は，再び，「$(z)(z \in x . \equiv . z \in y)$」であり，そして，事実，I—III章の定義は一般に繰りいれることができる．とくに，その公理は：

(ii) $$x = y . x \in z . \supset . y \in z,$$

と圧縮されるが，これは4.1とおなじであり，§38の(vii)におけるのと同様である．その公理型は：

(iii) $$\{x : Fx\} \in \mho \quad (「Fx」は層別化されている)^{1},$$

と圧縮される．

この層別化の条件のために，数に関係している§12と§22の定義は，NFには不適当である．数をフレーゲ-ホワイトヘッド-ラッセル流に解釈するときにNFにおいて必要なクラスの存在を証明することの方が，フォン・ノイマンやツェルメロに従うのよりもう

1 読者は，この括弧内の紋切型の語句自身が簡約化であることに気づくであろう．完全には，それは，『層別化された式だけをここの「Fx」に代入せよ』を意味する．

まくいく[2]. ツェルメロの集合論が，フレーゲの数に対して，サイズの大きすぎるクラスとして提起したところの障害は，NF によっては幸いにも提起されない.

層別化のテストについて，二つの点をのべておかなければならない. すでにのべたように，そのテストは，ある変項がくりかえし現われるすべての場所でおなじ指標を割りあてること，を含んでいる；なお，なんども量化されているときはいつでも，束縛変項を異なる変項と同様に扱うことができる，したがって，式：

$$(x)(x \in y) \supset (\exists x)(y \in x)$$

は，層別化されているとみなされうる. このように規定するのは便宜上のことにすぎない，というのは，さもなければ，改名に訴えておなじ結果に達することができるからである.

もうひとつの点は，層別化の観念が，理論上では，原初的記法にのみあてはまる，ということである. もしある式が定義された記法を含むなら，これらの記法は，層別化のテストのあいだ，隠れた原初的なエプシロンのすべてを露出するのに十分なぐらい展開されたものと想像されなければならない.

NF にはタイプはない. また，式が有意味であるために，層別化されていることも要求されていない. 層別化というのは，もしある式が特定の公理型(i)中にある「Fx」の一例としての資格をもつべきであるならば，その式が従わねばならぬ究極的な還元不可能な規定であるにすぎない. (i)によってこのように供給されるクラスは，タイプごとに重複することはない；それらは絶対的である. たとえば，「$x=x$」が層別化されているので，その存在が(i)によって保証される $\mathfrak{V}$ は，領域全体である. また，「$x \notin z$」が層別化されているので，その存在が(i)によって保証される $\bar{z}$ は，z の真の無制限な補クラスである. NF の領域は，実際に，クラスのブール代数を与える.

層別化はクラスの存在には必要でない. それは，(i)(または(iii))による直接の存在証明にのみ必要なのである. 間接的には，層別化されていないメンバー性の条件によって与えられるクラスの存在も，しばしば，証明できる. たとえば，「$x \in z \,.\mathbf{v}.\, x \in w$」は層別化されているので，(i)により，

$$(z)(w)(\exists y)(x)(x \in y \,.\equiv:\, x \in z \,.\mathbf{v}.\, x \in w),$$

要するに，$(z)(w)(z \cup w \in \mathfrak{V})$ をうる. しかし，そのとき，われわれはさらに進んで，その

2 Whitehead and Russell の意味でのカーディナル数および順序数の理論は，Rosser により *Logic for Mathematicians* において，NF からかなり詳細に展開されている.

w を $\{z\}$ にとることができる；なぜなら，(iii)により，$\{z\} \in \mho$，そのうえ，われわれの変項は一般的なのであるから，この間接的な方法で，$z \cup \{z\} \in \mho$ を結論する．「$x \in z \,.\mathbf{v}.\, x = z$」は層別化されていないので，これを(i)(あるいは(iii))のただひとつのステップによって証明することはできなかったであろう．だが，この種の遠廻りによって，累積的タイプ理論の利点の一部をえているのである．

また，われわれが失う部分もある．順序対は，実際，無制限に手に入る：(iii)は「$(z)(w)(\langle z, w\rangle \in \mho)$」を与え，それから，代入は，「$(z)(\langle z, \{z\}\rangle \in \mho)$」のような層別化されていないケースを与える．たとえそのようであっても，NF は，異質な関係の禁止にきわめて類似したものを保持している：(iii)から，直接的にせよ代入を続けて行なうことによるにせよ，「$\{\langle z, \{z\}\rangle : Fz\} \in \mho$」のような定理型をうることはまったくない．この理由で NF は，累積的タイプ理論ほど寛やかではない．

他方，いくつかの重要な点で，NF は累積的タイプ理論より寛やかである．それは〔タイプの〕最高限度という条件をもたない；結局のところ，$\mho \in \mho$，である．ホワイトヘッドとラッセルそしてツェルメロがしたように，とくに無限クラスを要請しなければならないどころか，NF は直接 $\mho$ において無限クラスをひとつ有している；そして，(iii)はそのメンバーに終りがないことを保証している，たとえば，Λ, $\{\Lambda\}$, $\{\{\Lambda\}\}$, 等々．この最後の考察によって，実際，NF の $\mho$ は，ツェルメロの無限公理(§39の(v))にある「x」についての条件を文字通り満足している．

タイプ理論がそうだからという理由だけで，NF が逆理から身をかわしている，というのは既定の結論ではない[3]．NF は，結局，タイプ理論の包括化公理型を忠実に守っていると，実際，いえるであろうか？　NF が危険なほど推論規則を強めているのは，タイプの上で多義的な変項を一般的変項に変えながら，われわれが急いで包括化公理型をつけ加えるときにかぎる．なぜならば，式：

(iv) $$(x)(x \in y) \supset (\exists z)(y \in z)$$

(§37 の(ii))は，われわれの変項が単にタイプの上で多義的と考えられるときではなく，一般的なものにとられるときに，量化の論理の妥当な〔言明〕型「$(x)Fxy \supset (\exists z)Fyz$」の一例としてただちに主張できるのを見たからである．

例(iv)は，その変項がタイプの上で多義的でも，時には真となることがあるが，それは集合論によって真なのであって，量化の論理だけで真なのではないことを，われわれは注

3 他に指示する場合を除いて，私は，つねに無限公理をもたないタイプ理論を意味している．

意した．変項を一般的にとろう，そうすれば，(iv)は論理的に妥当である；変項をタイプの上で多義的なものにとろう，そうすれば，(iv)は論理的には妥当しないが，それでも，タイプ理論においてそれは証明可能である．さて，これがつねに正しいかどうか，いいかえれば，反対に，

(A) その変項が一般的なものにとられるときには論理的に妥当するが，変項がタイプの上で多義的なものと解釈しなおされたときにはタイプ理論において証明可能でないような，層別化された式がある，

かどうかを，われわれは疑ってもよい．

(A)と等値なのはこれである：

(B) NF の層別化された定理のうちには，変項がタイプの上で多義的なものと解釈しなおされるときにタイプ理論において証明可能でないものがある．

もし(A)が真ならば，あきらかに(B)も真である，論理的に妥当な式は，それ自体からして，NF の定理だからである．そこで，逆に，(B)を仮定しよう；(A)を証明する．T を(B)におけるような層別化された定理としよう．それゆえ，T は NF のある公理：(ii)と(iii)のいくつかのケース――それらを $(\mathrm{iii})_1, \ldots, (\mathrm{iii})_n$ とよぼう――から論理によって証明可能である．それゆえ，その前件が (ii), $(\mathrm{iii})_1, \ldots, (\mathrm{iii})_n$ から成り，その後件が T である条件文 C は論理的に妥当である．さらに，C は層別化されている；なぜなら，(ii), $(\mathrm{iii})_1, \ldots,$ $(\mathrm{iii})_n$ および T のおのおのは層別化されており，その自由変項を普遍的に量化しておのおのを他から隔離することができるからである．さて，(ii)と(iii)の諸ケースは，定義が展開され，変項がタイプの上で多義的なものと解釈しなおされるとき，タイプ理論においても成りたつ(§36の(v)と(iv)とを参照)．だが，T は，変項がおなじように解釈しなおされると，そこでは証明可能ではない((B)参照)．また，このとき，C も証明可能ではない；したがって，(A)が成りたつ．

例(iv)からしてわれわれはそう想像する用意があるが，もし(A)と(B)が偽なら，NF の無矛盾性はタイプ理論のそれから生ずる．なぜなら，なんらかの矛盾が NF において証明可能ならば，層別化された矛盾を含めて，すべてが証明可能である；そして，そのとき，(B)が成りたたないので，これらはタイプ理論においても証明可能となるであろうからである．

また，NF がツェルメロの無限公理を生み出すという点で強いように見えるからといって，反対の結論を急いで下さないようにしよう．その〔無限〕公理というのは，結局のとこ

ろ，層別化されていない；NF は，やはり，層別化された事柄においては，タイプ理論とおなじくらい弱いままでもありえよう．事実は，そうではない；(B)は真であることが分る；だが，その証拠については，§41 を待たなければならないであろう．

(B)は NF の無矛盾性の容易な証明となりえたでもあろうものを閉め出してしまうが，それは矛盾性を負わせはしない．したがって，希望をもって前進しよう．シュペッカー(Specker)(1958, 1962)は，NF の無矛盾性の問題というのは，§36 の(iv)と(v)という形におけるタイプ理論が，それに一群の**タイプ多義性公理**(*axioms of typical ambiguity*)を次のようにつけ加えたときにも，相変らず無矛盾であるかどうか，という問題と等値である，ことを示している．自由変項をもたない任意の文において，すべての指標をひとつ上げよう；すると，もとの文とこの結果生ずる文とを等しくおく双条件文は，タイプ多義性公理としての資格をうる．直観的には，これらの公理の内容とは，あるタイプが形式的にはもうひとつ別のタイプとおなじだということである．

シュペッカーの結果は，再保証という以上に興味深い；なぜなら，カントールの定理というのが，すべてのタイプをサイズの上で異なるものとする点で，タイプ多義性公理を受けいれ難いものとのみしているからである．しかしながら，シュペッカーの結果は，それらの〔タイプ多義性〕公理の真理性に関する問題ではなく，ただ，それらの公理が§36 の(iv)および(v)と無矛盾であるというだけの問題である；そして，これは，シュペッカー(1962, 117—119 ページ)が示唆しているように，より受けいれやすいものである．

41．非カントール的クラス．帰納法再論

28.16 および 28.17 の線に沿って，$z \prec \{x : x \subseteq z\}$ を証明するためには，

$$(w)(z \cap \{y : y \notin w`y\} \in \mho)$$

を必要とする；そして，これは，ツェルメロの体系と累積的タイプ理論においてはえられることになった(§38 の(ix)を参照)のに反して，「$y \notin w`y$」が層別化されていないので，§40 の(iii)からは出てこない．ここに，NF が累積的タイプ理論ほど寛やかでないということのもうひとつの例証がある．この点で，NF は，対が定義されている普通のタイプ理論とほとんでおなじ状況にあった(§36, (viii)と(ix)参照)．かくして，われわれが NF において証明に成功するのは，「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」ではなく，§36 の(ix)に対応するもの，簡潔には，「$\iota``z \prec \{x : x \subseteq z\}$」である．

だが，この点において，NF と，対が定義されているタイプ理論とのあいだには，やは

り，相違がある．対が定義されているタイプ理論においては，通常の定義におけるような「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」は，偽ではなく無意味になる；この結果，われわれは，自由に，§36の(ix)（事実上では，「$\iota``z \prec \{x : x \subseteq z\}$」）を「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」の再定義として籍に入れ，かくして，結局は，カントールの定理を維持することができた．他方，NFにおいては，通常の定義(11.1, 20.3)におけるような「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」は「$\iota``z \prec \{x : x \subseteq z\}$」と同様に有意味であるし，その両者は混同されるべきではない．後者はNFの定理である．だが，前者――カントールの定理そのもの，「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」――は，NFにとっては，ある z に対しては真であり，他のものに対しては偽である．z が $\mathfrak{V}$ なる場合には，それはあきらかに偽である．NFは，「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」の証明そのものが駄目になることによって，「$\mathfrak{V} \prec \{x : x \subseteq \mathfrak{V}\}$」または「$\mathfrak{V} \prec \mathfrak{V}$」を割愛した．ツェルメロの体系は，むしろ，$\mathfrak{V}$ をもたないことによって，それを割愛したのである．

たいへん結構である；NFにおいては，「$z \prec \{x : x \subseteq z\}$」を欠くゆえに，われわれは「$\mathfrak{V} \prec \mathfrak{V}$」から免れている．だが，われわれは，定理としての「$\iota``z \prec \{x : x \subseteq z\}$」を欠くことはないし，それゆえ，また，「$\iota``\mathfrak{V} \prec \{x : x \subseteq \mathfrak{V}\}$」すなわち，「$\iota``\mathfrak{V} \prec \mathfrak{V}$」を免れることもない．これは逆理的であろうか？ たしかに，「$\iota``z \prec z$」は，任意の z に対しては逆理的のように思われる，Func $\breve{\iota}$ かつ $z \subseteq \breve{\iota}``(\iota``z)$，したがって，「$\iota``z \prec z$」に反して，たぶん，$z \preceq \iota``z$ であろう．だが，この誤まった推論を見てみよう：「$z \preceq \iota``z$」へのステップは $\breve{\iota} \in \mathfrak{V}$ を予想していた．このとき，「$z \preceq \iota``z$」の反例「$\iota``\mathfrak{V} \prec \mathfrak{V}$」から，反対に，$\breve{\iota} \notin \mathfrak{V}$ を結論しなければならない．そのとき，また，$\iota \notin \mathfrak{V}$ でもある（なぜなら，§40の(iii)により，$(x)(\breve{x} \in \mathfrak{V})$）．

われわれは，たしかに，$z \simeq \iota``z$ を期待する，したがって，矛盾でないとしても，ここには奇妙さがある．しかも，対が定義されているタイプ理論も，この点では別段いい所がなかった；ただ，それほど露骨でないだけである．そこでは，「$\iota$」，または「$\{\langle x, y\rangle : x = \{y\}\}$」は無意味であったし，「$z \simeq \iota``z$」，または「$z \simeq \{\{v\} : v \in z\}$」も無意味であった，それゆえ，「$z \preceq \{\{v\} : v \in z\}$」と「$\{\{v\} : v \in z\} \prec z$」とは，表面上はともかく，それらを，それぞれ：

$$\{\{v\} : v \in z\} \preceq \{\{v\} : v \in z\}, \qquad \{\{v\} : v \in z\} \prec \{\{v\} : v \in z\}$$

とおなじ意味のものとして組織的に解釈しなおすまでは，無意味であった．NFは，これらの事柄について，より多くを語りうるということを除けば，対が定義されているタイプ理論以上に奇妙なのではない．

もちろん，$(z)(\iota``z \prec z)$ ということはない．それはまったく z に依存している．然り，

$\iota``\mathcal{V}<\mathcal{V}$ である；それでも，多くの，あるいは，大抵の $z$ に対して，$z\simeq\iota``z$. このように行儀のよい任意の z というのは，ロッサーの用語でいえば，**カントール的**(*Cantorian*)である．かくして，クラス z は，もし $z\simeq\iota``z$ ならば，あるいはそれと等値なることが示されうるが，もし $z\preceq\iota``z$ ならば，カントール的である．カントール的 z に対しては，カントールの定理「$z<\{x: x\subseteq z\}$」は普通に成りたつ．サイズがはみ出しているさまざまなクラス(そのなかには，NO もある)とともに，$\mathcal{V}$ がカントール的ではない，というのは当然なことである．

カントール的でないクラスは，いろいろな関連において，慣例に合わない行動をする．これらが，カーディナル数のあいだの大小関係を整列順序づけとならないようにする，ということをシュペッカーは示している[1]．私は，彼の注目すべき証明の本質的な点を，若干，指摘することにしよう．

われわれは，§30 の終りの方で，$^{=}\{z: z\subseteq x\}=2^{\stackrel{=}{x}}$ ということに注意した．シュペッカーは，「$y<2^y$」を層別化されたものにするために，「2^y」の異なる意味を導入する；彼は，$^{=}\{z: z\subseteq x\}$ をむしろ $2^{=(\iota``x)}$ と同一視する——これは，x がカントール的であるとき，$2^{\stackrel{=}{x}}$ とおなじである．より詳しくは，彼は，

(i) $$y={}^{=}(\iota``x)\,.\supset.\,2^y={}^{=}\{z: z\subseteq x\},$$

(ii) $$y>{}^{=}(\iota``\mathcal{V})\,.\supset.\,2^y=\Lambda$$

という条件をおく．もし y が正確に $^{=}(\iota``\mathcal{V})$ であるならば，(i) は $2^y={}^{=}\mathcal{V}$ を与え，かつ，(ii) は $2^{2^y}=\Lambda$ を与える．もし $y<{}^{=}(\iota``\mathcal{V})$ ならば，$2^y\neq\Lambda$ かつ $2^{2^y}\neq\Lambda$ の双方をうる．一般に，そのメンバーが，Λ に至る，しかし，Λ は含まない y, 2^y, 2^{2^y}, 等々，であるようなクラスを，シュペッカーは $\phi(y)$ とよぶ．かくして，どんなカーディナル数 y に対しても，

(iii) $$y\leqq{}^{=}(\iota``\mathcal{V})\,.\supset.\,y,2^y\in\phi(y),$$

(iv) $$y>{}^{=}(\iota``\mathcal{V})\,.\supset.\,\{y\}=\phi(y).$$

シュペッカーは，Ty を，y 箇のメンバーのクラスの中にどれだけ多くの単一部分クラスがあるかということとして，定義する．かくして，

1 1953. NF の「＝」を同一性として解釈しないという犠牲を払うことなしには，NF のどんなモデルも——公理と両立可能な「ϵ」のどんな解釈も——順序数のあいだの大小関係と有限カーディナルのあいだのそれとの双方を整列順序づけとすることはできないであろう，ということを，すでに，Rosser and Wang が示していた．それに関連するカーディナルと順序数との表現法は，Whitehead and Russell におけるものとおなじであることに注意されたい．

(v) $$\mathrm{T}\bar{\bar{x}} = {}^{=}(\iota``x).$$

x がカントール的であるときは，もちろん，$\mathrm{T}\bar{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}$. シュペッカーが証明するように，どんなカーディナル数 y に対しても，

(vi) $$y \leqq {}^{=}(\iota``\mho)\,.\supset.\,\mathrm{T}2^{y} = 2^{\mathrm{T}y},$$

(vii) $\phi(y)$ が有限である $.\supset.\ \phi(\mathrm{T}y)$ は有限である.

どんなカーディナル数 y に対しても，(v)により，$\mathrm{T}y \leqq {}^{=}(\iota``\mho)$ をうる，したがって，(iii)により，

(viii) $$\mathrm{T}y,\ 2^{\mathrm{T}y} \in \phi(\mathrm{T}y).$$

つぎに，(a) $\phi(y)$ が一箇のメンバーしかもたないと仮定しよう．すると，(viii)により，$\phi(y) \prec \phi(\mathrm{T}y)$ をうる．あるいは，(b) $\phi(y)$ がいくつかのメンバーをもつと仮定しよう．それらは，y と $\phi(2^{y})$ のメンバーとである；したがって，もし $\phi(2^{y}) \prec \phi(2^{\mathrm{T}y})$ ならば，$\phi(y) \prec \phi(\mathrm{T}y)$ ということになる．しかるに，(vi)により，$2^{\mathrm{T}y}=\mathrm{T}2^{y}$. したがって，

$$\phi(2^{y}) \prec \phi(\mathrm{T}2^{y})\,.\supset.\,\phi(y) \prec \phi(\mathrm{T}y).$$

これと(a)の下で発見されたこととから，帰納法により，$\phi(y)$ が有限であるようなすべてのカーディナル数 y に対して，$\phi(y) \prec \phi(\mathrm{T}y)$, したがって，$y \neq \mathrm{T}y$ ということが結果する．それゆえ，

(ix) $\phi(y)$ が有限である $.\supset.\ y \neq \mathrm{T}y.$

さて，帰謬法の仮定として，カーディナルのあいだの大小関係が整列順序づけであると仮定し，y を $\phi(y)$ が(${}^{=}\mho$ あるいは ${}^{=}(\iota``\mho)$ のように)有限なる最小のカーディナルとする．(ix)により，$y \neq \mathrm{T}y$. しかるに，(v)により，$\mathrm{T}y \leqq y$；なぜなら，$\iota``x$ はけっして x を超えないことを示すことができるからである．したがって，$\mathrm{T}y < y$. しかるに，$\phi(\mathrm{T}y)$ は，(vii)により，$\phi(y)$ のように有限である．したがって，y は最小ではない；矛盾.

フレーゲ版のカーディナルは NF に対するカーディナルであることが§40で注意された．そして，§33においては，これらのカーディナルのあいだの大小関係が整列順序づけであることの証明は，それに対応するフォン・ノイマンのカーディナルに関するそれに対応する事実の証明とは違って，選択公理に依存することが注意された．この理由からして，シュペッカーの否定的な定理は矛盾ではない．だが，それは，彼が指摘しているように，NF における選択公理の反証である．

この結果は，ロッサーが注意しているように(1954)，非カントール的クラスに対する選択公理の不成立を認容するが，それでも，カントール的クラスに対してはそれを仮定する権利を保留する，ということによって調整されることができる．したがって，われわれの有している事態は，まさしく，非カントール的クラスの側の因習にとらわれない行動のもうひとつの事例であり，奇妙さである．それが，すでに因習からはずれている「ι“z＜z」より嘆くべきことであるかどうか，は問題である．古典的な結果は，当のクラスがカントール的であるという前提を必要に応じて挿入することによって，NF においても，やはり，えられる．この点において，NF を，あらゆるものがカントール的であるような集合論よりも，単に一般的なものであるとみることができよう．

NF と関連するわれわれの次の論点は，無限カーディナルと選択公理とから生ずる唐突な結果である．それは，自然数の上での数学的帰納法という月並みの事柄である．この話は，§39 の (ii) および (iii) におけるように始まる：古典的には，§39 の (ii) とおなじように，われわれは，N を 0 と S によって定義し，それから，y を $\{z: Fz\}$ にとって帰納法の型(iii)をうるであろう．例のごとく，困難は $\{z: Fz\} \in \mho$ を示す際に生じる．とくに，この困難は，NF においては，「Fz」の役割をする式が層別化されていないときに生じる．その話の次の局面というのも，やはり，§39 と同様である：われわれは，帰納法を有限クラスの上に基礎づけるために (ii) を (iv) に反転しようとする，というのは，われわれの包括化〔公理〕型は「$\Lambda, x \cup \{y\} \in \mho$」を与え，したがって，すべての有限クラスを保証するからである．そして，再び，§39 とおなじ袋小路につきあたる：われわれは，有限クラスであるにもかかわらず，

(x) $$x \in \mathrm{N} \,.\supset.\, \{z: z \leqq x \,.\, {\sim}Fz\} \in \mho$$

の証明を必要とするし，帰納法なしでこれをうる明白な方法はないのである．

§39 のそれらのページでわれわれが関係してきたツェルメロの体系においては，「$\mathrm{N} \in \mho$」を要請し，それから，分出によって，上の (x) を，もしくは「$\mathrm{N} \cap \{z: Fz\} \in \mho$」さえも推論することによって，この障害は切り抜けられた．このコースは NF には開かれていない，なぜなら，あきらかに，分出そのものが NF に対して成りたたないからである；「$\mho \in \mho$」とともに，それは，「$\mho \cap \alpha \in \mho$」を，したがって，無条件に「$\alpha \in \mho$」を与えるであろう．われわれは，上の (x) を，単に，それ以上の公理型としてつけ加えることができるであろうし，あるいは，再び，13.1 の形をつけ加えることもできよう；だが，敗北感なしとしない．

ここ，NF においては，先ほど注意した層別化の動機からして，われわれは，ツェルメ

ロまたはフォン・ノイマンの数よりは，むしろ，フレーゲの数でやってゆくものとして理解されねばならない．さて，フレーゲの数は，少くともタイプ理論においては，§39の帰納法についての困難には免疫であった．だが，それは，算術がタイプのおのおのにおいて別べつに行われていたからであった．これに反して，NF が誇りとするのは，タイプごとの重複が廃止されていることである．このタイプの溶解はいくつかの層別化されていない式を招き，そのために，帰納法についての困難が再現しうるのである．

他方，NF は，タイプ理論の下でのフレーゲの算術に関係していた有限性の困難から免れている，と想定されるであろう．そこでは，減法の一義性を保証するために，無限公理，§39の(i)，が必要であった．ここでは，NF はそれを必要としない，と想定されるであろう．それが，とくにそのための要請なしに，無限クラス——顕著なものとしては，$\mho$——をもっている，ことをわれわれは見たのである．

しかしながら，有限性と無限性とは当てにはならない．驚いたことには，ツェルメロの体系と NF との双方が有限クラス $(\Lambda, x\cup\{y\}\in\mho)$ を供給するにもかかわらず，そして，数学的帰納法はいかなる無限クラスをも要求しない(IV 章参照)にもかかわらず，それでも，双方の体系において帰納法についての困難があるということを，すでにわれわれは見た．ところで，NF が備えている無限クラスへの通路というのは，まったく，減法の一義性を保証するために必要とされたたぐいのものである，とわれわれは確信できるであろうか？どのクラスも n のメンバーとしての資格をうるのに十分なメンバー(たとえば，n)をもっていないという理由で，自然数 n が Λ となるときに，減法についての困難がフレーゲ-ラッセルの算術に現われる，ということが思い出されるであろう．もし，反対に，どの自然数もこのように Λ に帰着することがない——要するに，$\Lambda\notin N$——を示すことができるならば，減法の一義性についてのわれわれの困難は克服される[2]．だが，NF において，$\Lambda\notin N$ を証明できるであろうか？ たしかに，$\mho\in\mho$；たしかに，$\mho$ はすべて異なっている際限のないメンバー Λ, $\{\Lambda\}$, $\{\{\Lambda\}\}$, … をもつ；それでも，やはり，$\Lambda\notin N$ の証明を試みてだけみよう．

ひとつの自然なプランというのは，それを帰納法によって証明することであろう．(フレーゲの 0，たとえば，$\{\Lambda\}$ に対して) $0\neq\Lambda$ は，容易に証明される．もし，さらに，フレーゲの S に対して $(x)(x\neq\Lambda\,.\supset.\,S`x\neq\Lambda)$ が証明できれば，数学的帰納法によって，$(x)(x\in N\,.\supset.\,x\neq\Lambda)$ を，もしくは，簡潔に，$\Lambda\notin N$ を結論できる．帰納法はここではまっ

2 「$\Lambda\notin N$」は，§39，註1にある無限公理の表現法を思い出させる．

たく正しい，なぜなら，層別化が成りたっているからである；$\{x: x \neq \Lambda\} \in \mho$. 問題は，どのようにして $(x)(x \neq \Lambda . \supset . \mathrm{S}`x \neq \Lambda)$ を，すなわち，$\breve{\mathrm{S}}``\{\Lambda\} \subseteq \{\Lambda\}$ を，証明するかである．

足がかりをうるどんな方法も浮ばない．したがって，われわれはより実質的な帰納法をえようと試みる：おのおのの $x \in \mathrm{N}$ について，ただ $x \neq \Lambda$ ということだけでなく，x によって決定されるある特定のクラスが x のメンバーであることの証明を，われわれは試みる．そして，どんなクラスなのであろうか？　どうあっても，$\{y: y < x\}$ である；$x>$ なる x 箇の数がある．したがって，

$$\{y: y < 0\} \in 0,$$
$$(x)(x \in \mathrm{N} . \{y: y < x\} \in x . \supset . \{y: y < \mathrm{S}`x\} \in \mathrm{S}`x)$$

の証明に向おう．この仕事は手ごわいものではない．だがそのとき，残りのステップ：

$$z \in \mathrm{N} . \supset . \{y: y < z\} \in z$$

への帰納法のステップ，はわれわれの役にたたない，なぜなら，いまの困難というのは，フレーゲの数に対して適当な定義に従って展開されたときに，「$\{y: y<x\} \in x$」が層別化されていないものとなり，したがって，帰納法に逆らうということだからである．

われわれのしたいと思っている推論過程には，層別化されていない条件に対する帰納法が NF においては成りたたない，ということが介在しそうもない，と感じたいような気分になっていたかもしれない．そのとき，その人は，上の例によって迷いから醒める．

「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」が NF において証明できるかどうかという問題は，しばらくのあいだ，いろいろな出版物において未解決の問題と認められていた．実際，上の§40の(B)が未解決の問題であるかぎり，「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」は証明されずにいることを余儀なくされていた．なぜなら，「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」はタイプ理論においては証明できないからである；このことは，§36においてタイプ理論の無矛盾性を確立するのに用いられた有限クラスのモデル領域においては「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」が真でない(「$\Lambda \in \mathrm{N}$」が真である)，ということを示すことによって，示されうる．そのうえ，「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」は層別化されている．したがって，もしそれが NF の定理ならば，(B)は真である．

NF に対する選択公理の反証を基礎にして，シュペッカーは(同所で)，「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」が，実際，NF の定理である(したがって，(B)は真である[3])，ことをのべた．アイディアのあいだの関連のいく分かは，次のようにして，見られよう：選択公理は有限クラスに対して真

3 (B)が真であることは，最初に，Putnam によって私に注意された；私の『Uuification of universes』，270 ページを見よ．彼の議論は，おなじように，Specker の結果を用いている．

である (31.3)，にもかかわらず，NF においては偽である；したがって，NF には無限クラスがある；それゆえ，$\Lambda \notin \mathrm{N}$. もちろん，この素描はそれだけでは決定的ではない；われわれは，NF に無限クラス $\mathfrak{V}$ があることを，すでに知っていた；しかも，われわれは，それによって $\Lambda \notin \mathrm{N}$ を証明することはできなかった．だが，$\mathfrak{V}$ を無限クラスとよぶのは，$\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}, \ldots \in \mathfrak{V}$ という，とんでもないほどに層別化されていない考察を根拠としていたのにすぎなかった．シュペッカーの径路が有効なのは，その途上での本質的な式が層別化されているからである[4].

「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」の証明可能性は，非カントール的クラスが，そのすべての因習にとらわれない行動にもかかわらず，その他の行儀のよい領域に対する無害な附属物というに止まるものではなく，行儀のよい対象そのものについての望ましい定理を証明する際の貴重な媒介であることを示唆している．というのは，シュペッカーが「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」を証明できたのは，非カントール的クラスに対する選択公理の不成立のためであるが，「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」自身は非カントール的クラスについてはなにも述べてはいないからである．

だが，NF は，やはり，数学的帰納法に関して，遺憾な点を若干残している，と言われなければならない．数学的帰納法のもっとも著しい失敗というのが，シュペッカーによって「$\Lambda \notin \mathrm{N}$」において救われたとはいうものの，層別化されていない条件についての数学的帰納法が，一般に，NF には備わっていない，という事実は残っている．この脱落は無用であり，気まぐれでもあるように見える．それは，NF におけるクラス存在の基準が，結局，逆理とその回避に対して実際中心的な位置を占めるような問題点に，十分近づいていないことを示唆している．

42. つけ加えられた究極クラス

原初的述語「ϵ」は，クラスというものの意味を，(a) メンバーをもつという，エプシロンの後での意味と，(b) メンバーであるという，エプシロンの前での意味とに分ける．さて，数学的帰納法についてのわれわれの絶えざる悩みというのは，(a) という目的にだけ必要としたクラスの存在に関わる悩みであった．N の定義から数学的帰納法の〔言明〕型を導くためには，われわれは，その定義の変項の値として，アプローチの別に応じ，クラス $\{x : Fx\}$，あるいは $\mathrm{N} \cap \{x : Fx\}$，あるいは $\{x : x \leqq z \,.\, {\sim}Fx\}$，を必要とする；そして，それは「$\epsilon$」の右側にだけくる変項である．したがって，帰納法の不成立や，純粋に後エ

4　Nicholas Goodman は，1961 年の Harvard の honors thesis でこの細部を補充した．

プシロンというこの型にはまっている他のどんな不首尾に対しても，目的(a)に限定された中途半端な身分の不完全なクラスを要請することによって NF に支えをかう，というアイディアが浮ぶ．さて，2.1 におけるような仮クラスは，目的(a)にだけ役だつが，仮クラスにまつわる困難は，それらが変項の値でないということである．帰納法に対しては，N の定義の変項の値として，まさしく，$\{x : Fx\}$，もしくは類似のもの，が必要である．したがって，要求されているのは，まさに，**究極クラス**(*ultimate class*)である(§§2, 6).

そのメンバーが，まさしく，あのメンバー性の条件を満足する**集合**(*set*)であるようなクラス(たぶん，究極クラス)を，あらゆるメンバー性の条件に対して，逆理を再び生ぜしめることなく，無制限にわれわれは要請できる．すなわち，x を集合とよぶことは，単に，$(\exists z)(x \in z)$ をいうことなので，

(i) $$(\exists y)(x)(x \in y \,.\equiv.\, (\exists z)(x \in z) \,.\, Fx).$$

あるいは，

(ii) $$(\exists z)(x \in z) \equiv .\, x \in \bigcup \mathfrak{V}$$

であるから，より簡潔に：

(iii) $$\alpha \cap \bigcup \mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$$

といってもよい．基礎になっている定義は，やはり，I—III 章とおなじである，それゆえ，$\alpha \in \mathfrak{V}$，あるいは $\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$，あるいは $\bigcup \mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ という前提を有してはいない．もちろん，(iii)から，α を $\bigcup \mathfrak{V}$ あるいは $\mathfrak{V}$ にとって，たしかに，$\bigcup \mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ はえられる．しかしながら，$(\exists z)(\bigcup \mathfrak{V} \in z)$，すなわち，$\bigcup \mathfrak{V} \in \bigcup \mathfrak{V}$ かどうか，あるいは，$\bigcup \mathfrak{V}$ が究極クラスであるかどうか，は別問題であり，これはそれ以上の要請によって自由に解決できる．

すると，$\bigcup \mathfrak{V}$ はすべての集合のクラスである．それは，すべてのクラスのうちでもっとも包括的である．ただし，もし究極クラスが存在するならば，$\mathfrak{V}$ はなおいっそう包括的である；なぜなら，究極クラスは，(あらゆるものが属する) $\mathfrak{V}$ に属し，$\bigcup \mathfrak{V}$ には属さないからである．だが，(もしなんらかの究極クラスが存在するならば) $\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ である，というのがその罠である；かくして，$\bigcup \mathfrak{V}$ はやはり，現に存在しているもっとも包括的なクラスである．もし究極クラスが存在しなければ，$\bigcup \mathfrak{V} = \mathfrak{V}$；これが，補足されていない NF の方法であった．それだからこそ，それは 8.8 なのであったし，とりもなおさず，7.11 であった；だが，7.11 が依存している「$\{x\} \in \mathfrak{V}$」自体は，もし究極クラスが措定されるならば，拒絶されることを思いおこそう．結局のところ，「$x \in \{x\}$」は $x = x$ をいっているに

すぎない，われわれは，2.1 における と同様に，クラス抽象を，やはり，非関与的に用いているからである；したがって，われわれは，やはり，$(x)(x \in \{x\})$ を有するし，それゆえ，もし x が究極クラスならば，$x \in \{x\}$ で，しかも，$(y)(x \notin y)$，したがって，$\{x\} \notin \mathfrak{V}$.

$\cup\mathfrak{V}$ としてすべての集合のクラスに言及することは，他の文献に見られなかったことであろう．それはクラス抽象の，とくに「$\mathfrak{V}$」の，私の非関与的な用法に依存しているからである．ときには，すべての集合のクラスに対して，特別の記号「$\mathfrak{M}$」が定義される．そして，『数理論理学』において私は「V」を使ったが，これは，そこでは，われわれの「$\{u: u=u\}$」ではなく，「$\hat{u}(u=u)$」を，それゆえ，「$\cup\mathfrak{V}$」を表わしていた．§6 で説明したように，一般に，

(iv) 「$\hat{u}Fu$」は「$\{u: Fu\} \cap \cup\mathfrak{V}$」を表わす．

この $\mathfrak{V}$ と V とのあいだの区別，および，$\{x\}$ についてのそれに対応する点(§6 参照)は，たとえ懐柔せねばならぬ『数理論理学』というものが以前には存在しなかったとしても，また，NF を究極クラスで補足するというアイディアがここで初めて提出されていたのだとしても，注意を要したであろう．好きなように $\{u: u=u\}$ または $\hat{u}(u=u)$ (これらは究極クラスがないときはおなじである)としての $\mathfrak{V}$ をもてば，結局のところ，NF は，まったくそれ自体からして，$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ を与えた．究極クラスをつけ加えよう，そうすれば，記号「$\mathfrak{V}$」をその対象——後にも先にも，すべての集合のクラス $\hat{u}(u=u)$ ——に結びつけるか，それとも，私がしているように，非関与的な抽象の表現「$\{u: u=u\}$」に結びつけるか，に応じて，$\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$ がやはりえられるか，あるいは，$\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ がえられるかであろう．「$\{x\}$」および他の例に対しても同様である．

究極クラスを NF の領域へつけ加えることによって，われわれは拡大された領域を獲得しつつある．この結果生ずる体系は，NF の体系の拡大(enlargement)とよばれてもよい．だが，それは，その用語のテクニカルな意味での，その体系の**拡張**(*extension*)ではない；それは，公理を NF の公理につけ加えることによってうることはできない．われわれは，たしかに，(iii)，または「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」をつけ加えた．だが，われわれは，NF の古い包括化〔公理〕型，すなわち，「$\{x: Fx\} \in \mathfrak{V}$」(「$Fx$」は層別化されている) を単純に維持していることはできない．われわれは，たったいま，たとえば，「$\{x: x=x\} \in \mathfrak{V}$」がいまでは偽となるのを見た．したがって，われわれが見たように，「$\{y: y=x\} \in \mathfrak{V}$」も偽となる．NF の古い包括化〔公理〕型の存在論的内容を損じないようにしておくためには，それを「$\cup\mathfrak{V}$」に相対化(§33 参照)しなければならない；NF にとって存在であったものは集

合性(sethood)となる．かくして，NF が「$\{x: Fx\} \in \mho$」をのべたところでは，いまでは，われわれは「$\hat{u}Fu \in \cup\mho$」に切りかえ，また，「F」の下に隠れているどんな変項も集合に(すなわち,「$\cup\mho$」に)制限しなければならない．われわれが**集合性公理**(*sethood axioms*)とよんでよいものは，要するに，「Fu」のところに層別化された式をもつ「$\hat{u}Fu \in \cup\mho$」の「$\cup\mho$」への相対化から成る．

そこで，われわれの新しい体系は，これらの集合性公理，さらに，まったく制限のない包括化〔公理〕型「$\hat{u}Fu \in \mho$」および外延性公理とから成る．この最後の公理は，やはり，「$x=y \,.\, x \in z \,.\supset.\, y \in z$」(§40 の (ii)) であり，依然として,「$x=y$」の「$(z)(z \in x \,.\equiv.\, z \in y)$」としての定義，または 2.7，を仮定している．そして，究極クラスを持ちあわせているいま，この定義には，新たな緊急の必要性があることに注意されたい；「$(z)(x \in z \,.\equiv.\, y \in z)$」は，もはや有効な別法ではない，なぜなら，それはすべての究極クラスを同一とするであろうから．

そのようなものが，私の『数理論理学』(*Mathematical Logic*),〔改訂〕後の版の体系である．最初の版では，束縛変項を集合に制限することを怠って，集合性の条件の相対化が不十分であった；そして，その結果，ロッサーが示したように (1942)，その体系はブラリ-フォルティの逆理へ導かれた．束縛変項についての留保制限は，ワン (1950) による．そもそも究極クラスを認めるというアイディアは，フォン・ノイマン (1925) にさかのぼる，また，ある点では，ケーニッヒ (König) (1905) とカントール (1899) にさかのぼる[1]．

本ではなくて，その体系を ML として引用しよう．それに属するものは,「$\in$」，量化および真理関数によって語られるものだけである．仮クラスおよび非関与的な抽象という事柄すべては，§38 で強調したように，スタイルなのである．「x は集合である」が『数理論理学』におけるように「$x \in \mathrm{V}$」として表現されるか，あるいは，これらのページにおけるように「$x \in \cup\mho$」として表現されるかどうかは，ML にとっては外面的な定義上の相

1 Cantor からの出典は，1932 年まで未刊であった書簡(443 ページ以下)である．「集合」と「クラス」という対照的な術語の対は，すでに，ここに現われていたし，また，König にも現われていた．(集合とは違う) Cantor のクラスを仮クラスと見るか実クラスと見るかは，上の §2 で注意したように，文脈とは無関係である．それらを実クラスと見るのは，たぶん，それほどこじつけではなく，たしかに，それは König の表現にもっともよく合っている．だが，Cantor も König も，集合性の簡潔な条件「$(\exists y)(x \in y)$」を挙げてはいなかった．これを挙げておけば，集合とは違うクラスが変項の実際の値の内に予定されていたことが，あきらかに，示唆されたであろう．厳密にいえば,「$(\exists y)(x \in y)$」は，そのことに関するかぎり，ただ間接的に von Neumann に現われているにすぎない，だが，それというのも，関数という形での彼の慣例に従わない出発点のためにすぎない(下の §43 参照)．アプローチが標準化されるときには，それは表面に出てくる．

違にすぎない；実際，「$(\exists y)(x \in y)$」は，定義なしに，どちらの手段にも合う．

この節の初めで，われわれに ML をとりあげるようにさせたのは，NF における数学的帰納法についての困難であった．あきらかに，ML はこの困難をとり除く．N は，再び，§39 の (ii) におけるように定義できる：

(v)　「N」は「$\{x: (y)(0 \in y \,.\, \mathrm{S}``y \subseteq y \,.\supset.\, x \in y)\}$」を表わす，

それから，$\hat{u}Fu \in \mho$ は無条件に確かなので，y を $\hat{u}Fu$ にとって帰納法の型，§39 の (iii)，を導くことができる．しかしながら，N がこのプロセスにおいて微妙な変化をうけている，ということが考察されなければならない．上の N の定義は，「y」の値域が究極クラスを包含するようになるという理由から，ML に対しては，それが NF に対して意味したものとは異なるあるものを意味している[2]．もし N が ML に対しても NF に対するのとおなじものであることを保証したい，とわれわれが思ったとしたならば，われわれは量化を集合に制限していたであろう．われわれがそうしないのは，いましがたのべた「$\mho$」と「$\{x\}$」とに関する方針：定義された記号を対象というよりは，むしろ，抽象の表現に結びつけるという主張，と一致していた．そのプランは，現在においては，とりわけ魅力的である，なぜなら，もしほんとうに相違があるならば——もし

(vi)　$\{x: (y)(0 \in y \,.\, \mathrm{S}``y \subseteq y \,.\supset.\, x \in y)\} \neq \{x: (y)(y \in \cup\mho \,.\, 0 \in y \,.\, \mathrm{S}``y \subseteq y \,.\supset.\, x \in y)\}$

ならば——左側のクラスはあきらかにより窮屈なものであり，右側のクラスは余計なものを含んでいるからである．あきらかに，0, 1, 2, およびそれらの続きは，双方のクラスに属する：それゆえ，不等性は，「N」の表現法としての左側ではなく右側の表現を疑うことを余儀なくさせる．

もしそのメンバーが正確に 0, 1, 2, およびそれらの続きであるような集合 y が存在するならば，右側のクラスは，もちろん，余計なものを含んでいない．それどころではなく，右側のクラスは，このとき，希望通り，まさしくその集合 y であろう．逆に，もしそのような集合 y がなければ，右側のクラスは余計なものを含むであろう．なぜなら，(「S」がフレーゲの後続者の意味をもつとき) その式は層別化されているのが判明する；それゆえ，そのクラスは集合性公理の下で集合としての資格をうる；したがって，それが余計なものを含んでいるのでなければ，それ自身，正確に，0, 1, 2, およびそれらの続きのものの集合 y とみなされるであろうからである．そこで，要約すれば，右側のクラスは，どの

2　Rosser, 1952, によって論評された．

みち，集合であり，もしそのような集合が存在するならば，それは，正確に，0, 1, 2, およびそれらの続きのものの集合である．そして，もし，反対に，正確に 0, 1, 2, およびそれらの続きのものの集合がないときにかぎって，左側のクラスは右側のそれとは異なっている．

正確に 0, 1, 2, およびそれらの続きを包含するために，いずれにしろ，左側のクラス，二つのうちでより窮屈なもの，にわれわれはたよることができるであろうか？　否；次のことの手際のよい証明をヘンキン (Henkin) がえている，N のどのような定義も，N が余計なものなしにちょうど 0, 1, 2, およびそれらの続きを含むことをわれわれが証明できるようにしてはくれない．「$0 \in N$」，「$1 \in N$」，「$2 \in N$」，等々，のすべてが成りたつかぎり，余計な $x \in N$ を——

(vii)
$$x \in N, \quad x \neq 0, \ x \neq 1, \ x \neq 2, \ \ldots$$

と無限に続く x を仮定しても矛盾がない，ことを彼の議論は示している．彼の議論は，要するに，次のようである：証明は有限箇の多くの前提のみを用いうるのにすぎないので，(vii) からの矛盾のどんな証明も前提 (vii) のうちの有限箇を使うにすぎないであろう；だが，そのようなどんな有限の部分もある x に対しては真である．

すでにII章において，クラスの上への量化が，われわれに，もしそうでなかったとしたらおよぶべくもなかってあろうような諸観念を定式化することを可能にした，ということにわれわれは注意した．その主な例というのは，「0, 1, 2, およびそれらの続き」のうちにあるか，それとも祖先という観念のうちにあるかはともかくとして，「およびそれらの続き」という慣用句であった．また，その章以降，われわれがその上へ量化しているクラスの領域は，理論に応じて変る不安定な事柄であることに注意した．同様な変化が，そのとき，そのような量化を借りて定式化された諸観念においても認められなければならない．これは，スコーレム (1922—23) によって強調された相対性のテーマである．そして，とくに，それは，なじみだと偽っている語「およびそれらの続き」にあてはまる；これが，ヘンキンの単純な議論の驚くべき結論なのである．

矛盾が演繹されえない場合には，モデルが存在する；これが，ゲーデルの 1930 年の，論理の完全性の定理の要点である．そこで，ヘンキンの議論によると，自然数によって満足される条件のどんな集合も，彼が**非標準的モデル** (*nonstandard model*)：余計なものを入れる解釈，とよぶものをも許さなければならない．もしペアノの公理が現にあるならば，「<」は，余計なものを整列させることさえもしないであろう，ということが理解できる．

「$F0$」,「$F1$」, … と無限に続くおのおのがある体系で証明できるが，しかし，「$(\exists x)(x \in N$.

$\sim Fx$)」もまた証明できるような式，たとえば，「Fx」があるとき，ゲーデル(1931)はそのような体系を，**ω-矛盾**(*ω-inconsistent*)とよんだ[3]．これらの言葉でいえば，ヘンキンの議論は，ω-矛盾な体系の無矛盾性を示している[4]．なぜなら，「F」を，(vii)を満足するひとつの対象 x を除くあらゆるものに対して真と解釈すればよい．

上の意味で ω-矛盾な理論は，たとえ無矛盾でも，許し難いものと思える．だが，ヘンキンの議論から(ヘンキンがしたように)，この術語とその定義は誤解を招き易い，ということがすぐ分る．もしある体系が無矛盾で，しかも「$(\exists x)(x \in \mathrm{N}\,.\sim Fx)$」および「$F0$」,「$F1$」, … のすべてを定理としてもち，そして，われわれが「0」,「1」, … を数の名前として解釈することを認めるならば，あきらかに，困難は「N」を「数」として解釈することにあり，けっしてそれ以上におよんではいないのである．それが ω-矛盾性なのである．(vii)との関連におけるヘンキンの議論は，最善の状況においてさえも，「N」が余計なメンバーをもつものとして解釈され**うる**ことを示した；だが，ω-矛盾性は，「N」がそう解釈され**ねばならない**場合の状態である．このような状態においては，余計なもののそのような押しつけを終らせる「N」の狭められた再定義を案出することも時には可能である(もっとも，ヘンキンの議論によれば，狭められた N はやはり余計なものを含むように無矛盾的に再解釈できるではあろうが)．そして，それは，時には，可能でない；なぜなら，0, 1, 2, 等々，と無限に続くもののおのおのによって満足されることが証明できるあらゆる定式可能な条件に対して，やはり 0, 1, 2, 等々，のおのおのによって満足され，しかも最初の条件を満足するすべてのものによっては満足されないことが証明できるもうひとつの条件があるということが，特定の体系においておこるのをわれわれは想像できるからである．これが，「N」の表現法を改良することでは癒すことのできない，ω-矛盾性の慢性的な形式である；あらゆる改良版が，こんどは，改良を受けることになる．このような悩みをもつ体系を，私は，**数的に無差別**(*numerically insegregative*)とよぶ[5]．これらの言葉を用いると，ω-矛盾性として語られた事柄はいっそう描き易くなる[6]．

3　Gödel, 1931, 187 ページ．また，Tarski, 279 ページの註，287 ページ以下を見よ．

4　Tarski と Gödel は，また，おのおの，ω-矛盾な体系の無矛盾性を示した；そして，Henkin は Skolem と Malcev による，これらに関連する考察を引用している．Henkin の議論に特殊なものはその直接性と単純性である．

5　『On ω-inconsistency』．

6　Rosser(1952)は，ω-無矛盾な理論が ω-矛盾な部分をもちうるであろうということに注意した．これは逆理的に思われる．だが，数的に無差別な部分をもつ数的に差別のある体系については，なんら奇妙なことはない；その含む方の体系は，数的な差別に対してより多くの機構を有している．

だが，(vi)へ戻ろう．ヘンキンの議論は，ML または他の任意の体系も，もし無矛盾なら，(vi)の表現の双方が数以上のものにおよぶような，つむじ曲りの解釈を許すことを示している．だが，彼の議論は，一方または双方の表現がちょうど数だけにおよぶような有りがたい解釈をも，ML は許さない，ということを示してはいない．ML が数的に無差別である，ということをわれわれは知っていないのである．

もし(vi)にのべられたクラスのいずれもが，正確に 0, 1, 2, およびそれらの続きを含むことができないならば，それは，もちろん，「y」の値として必要なクラス，または集合，が存在しないからであろう．では，もし，再び，§11 の反転手段にわれわれが訴えるならば，どうであろうか？　これは，N を

$$\{x:(y)(x\in y\,.\,\breve{\mathrm{S}}\text{“}y\subseteq y\,.\supset.\,0\in y)\}$$

と定義し，われわれの議論をすべての有限クラスの存在に依存させることを意味するであろう．それでも，ヘンキンの議論は一般的である．この定義はどのようにして失敗しうるのか？　その問いは混乱している．もしこの反転された定義には有限クラスだけが関係しているとわれわれが考えているのならば，それは，われわれが，すでに，余計なものなしに 0, 1, 2, およびそれらの続きを考えているからである．

この最後の議論の，ヘンキンの定理を別にしても，もうひとつ注意を要する構成要素というのは，N の集合性の問題である．(vi)の右側にあるクラスが集合であることは注意された；だが，(v)によれば N であるところの，左側のクラスとは何であろうか？ (v)における量化は，集合性公理に対して要求されるようには，集合に制限されてはいない．もちろん，やはり，N が集合であることの ML における間接的な証明をわれわれは探し求めてもよかったかもしれない；なぜなら，層別化の失敗にもかかわらず，存在が時には NF において間接的に証明できるのとおなじように，層別化の失敗や量化子の制限の不十分にもかかわらず，時には集合性が ML において間接的に証明できるからである．しかし，否である；注目すべきことには，(v)に定義されているような N の集合性は，ML が矛盾しているのでなければ，直接的にせよ間接的にせよ，ML において証明可能でないことをロッサーは証明した[7]．

これは，とくにそのために，「N ∈ U𝔙」をそれ以上の集合性公理として，ML に矛盾なくつけ加えることができない，ということを意味してはいない．われわれの美的感覚は，

7　1952, 241 ページ．

もちろん，そのような措置には反対である．だが，実数の理論は，N が集合でなければ，あるいは，とにかくその無限部分クラスのどの末端も集合でないならば，大したものにはなりえない．なぜなら，実数は，ひとつの例外はあるが，N の無限部分クラスだからである；そして，もしわれわれがそれらをクラスのうちに入れるか，関数に従属させなければならないならば，それらは集合でなければならない．ただし，実数は別様に解釈されることもできよう；だが，この種の問題を軽減するように実数が解釈できると想定するどんな理由も，私は知らないのである．

究極クラスは役にたつ，ということが判明する帰納法以外の箇所は，NF の非カントール的クラス(§41)を ML の中で追ってゆくことによって見出すことができる．NF から ML への移行において，「$\preceq$」の定義は，「N」の定義が蒙むることを見たような，目には見えないが，しかし実質的な変化を蒙っている．「目には見えない」というのは，定義の文字が変らないということである．「実質的」というのは，それにもかかわらず，内容が，束縛変項の値域の拡張によって，変ることを意味している．定義：

「$y \preceq z$」は「$(\exists w)(\mathrm{Func}\, w \,.\, y \subseteq w“z)$」を表わす

は，たとえ，集合 w が存在せずに，ただ，$\mathrm{Func}\, w \,.\, y \subseteq w“z$ なる究極クラス w が存在するとしても，$y \preceq z$ という効果を ML においては有している；そして，その場合，定義は文字通りおなじままではあるが，NF は $y \preceq z$ を否定するであろう．さて，非カントール的クラスとは，$\iota“z \prec z$ なるクラス z であった．(「$\prec$」の，目には見えないが実質的には変った意味の下では) ML にはそのようなものはない；反対に，$(z)(z \preceq \iota“z)$ ——したがって，$(z)(z \simeq \iota“z)$ ——である，なぜなら，$z \subseteq \breve{\iota}“(\iota“z)$ かつ $\mathrm{Func}\, \breve{\iota}$，そして，ML に対しては，($\breve{\iota} \notin \cup\mathfrak{V}$ としても) $\breve{\iota} \in \mathfrak{V}$ であるから．NF を ML へ拡大するのに議論領域へ(ι とともに)加えられた究極クラス $\breve{\iota}$ が相違を生ぜしめたのである．

NF のあらゆるものは ML の集合のうちに生き残っている；そのことはまさに，非カントール的クラスがそれへと移行するものが変則的なものとは思えなくなる，ということである．もし x が NF において非カントール的であるならば，x は，「$x \subseteq w“(\iota“x)$」が($w = \breve{\iota}$ の場合には成りたつが)あらゆる関数 $w \in \cup\mathfrak{V}$ に対しては成立しないような，ML における集合である．それでも，「$\preceq$」の ML の意味では $x \preceq \iota“x$，したがって，変則的なことはなにもない．

究極クラスのもうひとつのお恵みというのは，非カントール的クラスの消滅とともに，また，選択公理のあの注目すべき不成立，非カントール的クラスに依存していた不首尾，

もそこでは消滅するということである．直観的には，その関係は次の通りである．選択集合をもたないたがいに素である集合の非カントール的集合 x が存在するという意味で，選択公理は NF に対して成りたたなかった．ML においては，このおなじ x は，やはり，選択集合をもたないたがいに素である集合の集合ではあるが，それは，もはや，選択クラスを欠くにはおよばない．それでも，選択公理は，「たがいに素である集合のあらゆる集合は選択集合をもつ」という強い形においては成りたたない，だが，「たがいに素である集合のあらゆる集合(さらには：あらゆるクラス)は選択クラスをもつ」という形で，それを矛盾なく ML に対して仮定することができない，という徴候はなにもないのである．

さて，カントールの定理そのものについてはどうであろうか？ 28.16 および 28.17 の線に沿って，$z \prec \{x: x \subseteq z\}$ を証明するためには，

$$(w)(z \cap \{u: u \notin w`u\} \in \mathfrak{V})$$

を必要とする．だが，ML はこれを与える．なぜなら，z の(もしくは，任意の実在的なもの)どんなメンバーも集合である；したがって，

$$z \cap \{u: u \notin w`u\} = \hat{u}(u \notin z \,.\, u \notin w`u);$$

そして，無条件に，$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$ をうる．かくして，カントールの定理は，特殊な前提，あるいは他の制限なしに，ML において証明される．

つぎに，カントールの逆理についてはどうであろうか？ それは，カントールの定理「$z \prec \{x: x \subseteq z\}$」の z を $\mathfrak{V}$ にとり，それゆえ，「$\mathfrak{V} \prec \{x: x \subseteq \mathfrak{V}\}$」，すなわち，「$\mathfrak{V} \prec \mathfrak{V}$」をうるということである．だが，ML においては，$\mathfrak{V} \notin \mathfrak{V}$ なので，これはえられない．ML がカントールの逆理を免れるのは，NF のように，「$z \prec \{x: x \subseteq z\}$」の証明の崩壊によってではなく，ツェルメロの体系におけるのとおなじように：$\mathfrak{V}$ をもたないことによって，である．

ML のこの説明は，『数理論理学』の読者が $\{u: Fu\}$ を $\hat{u}Fu$ と混同することについていわれた事柄を反省するまでは，彼を驚かすであろう．ML は「$z \prec \hat{u}(u \subseteq z)$」一般を与えることはない；$\hat{u}(u \subseteq \cup\mathfrak{V})$ は $\cup\mathfrak{V}$ であり，かつ，もちろん，「$\cup\mathfrak{V} \prec \cup\mathfrak{V}$」は偽なので，$z = \cup\mathfrak{V}$ なる場合には例外が生じる．

どうしてカントールの定理の変形版「$z \prec \hat{u}(u \subseteq z)$」を ML において証明しようとしても無駄なのか，を見てみよう．作り出そうとしているものは，$\hat{u}(u \subseteq z)$ の，どんな関数 w に対しても $w``z$ に属していないメンバーである．28.16 および 28.17 のプランの下では，そ

の候補は，再び，$z \cap \{u: u \notin w`u\}$，いいかえれば，$\hat{u}(u \in z \,.\, u \notin w`u)$ であろう．だが，困難というのは，z のこの部分クラスが集合でなく，したがって，$\hat{u}(u \subseteq z)$ のメンバーでないかもしれなかった，ということである．それがつねに集合である，という議論は，「$u \notin w`u$」の層別化されていないという性格によって妨げられる．

したがって，逆理が「$\{u: Fu\}$」あるいは「$\hat{u}Fu$」のどちらの線に沿って求められるかに依存して，カントールの逆理は非存在か非集合性かのいずれかによって回避される，といってよい．

同様な二重のいきさつがラッセルの逆理そのものに対しても成りたっている．一方では，

$$\{u: u \notin u\} \in \{u: u \notin u\} \,.\equiv.\, \{u: u \notin u\} \in \mho \,.\, \{u: u \notin u\} \notin \{u: u \notin u\}$$

(6.13参照)，これから，例のごとく，違反したら矛盾に陥るということから，われわれは $\{u: u \notin u\} \notin \mho$ を結論する．そして，他方，

$$\hat{u}(u \notin u) \in \hat{u}(u \notin u) \,.\equiv.\, \hat{u}(u \notin u) \in \bigcup\mho \,.\, \hat{u}(u \notin u) \notin \hat{u}(u \notin u),$$

これから，$\hat{u}(u \notin u) \notin \bigcup\mho$ が結論される；「$u \notin u$」の層別化されていないという性格のおかげで，集合性公理もそうでないとはいっていない．かくして，自分自身のメンバーでないすべてのクラスのクラス $\{u: u \notin u\}$ は存在しない，これに反して，自分自身のメンバーでないすべての集合のクラス $\hat{u}(u \notin u)$ は，存在はするが，究極クラスである．

XIV. フォン・ノイマンの体系その他

43. フォン・ノイマン-ベルナイスの体系

私は，NF を拡大するのに，究極クラスという工夫を用いた．フォン・ノイマンは，それを，1925年に，ツェルメロの体系を拡大するのに用いた．だが，フォン・ノイマンによるツェルメロの体系の拡大は，公理型「$\hat{u}Fu \in \mho$」(あるいは§42 の(iii))の全力を出し切らせぬうちに止まってしまった．「Fu」の役割りをする式が，すべての集合に制限されるその束縛変項をもつ場合には，彼の体系は「$\hat{u}Fu \in \mho$」を与えるが，その他の場合には，一般にそうではない．NF から ML へ導いた制限されていない種類の拡大と対照して，この制限された種類の拡大を，ワンに従って，**述語的**(*predicative*)と，私はよぼう．ポワンカレの「述語的」の用法(§34)は，かくて，いくぶん拡張されるようになる，なぜなら，クラス抽象体の束縛変項を集合に制限する際，フォン・ノイマンは必ずしも $\hat{u}Fu$ をその束縛変項の値域外においてはいないからである．だが，この術語は，それにもかかわらず，§44 において明らかになるように，適切である．

フォン・ノイマンによる究極クラスを用いるツェルメロの体系の拡大は，われわれが見ているように，制限されている．集合の側では寛やかになっていることがまもなく気づかれるであろう．もしも集合がちょうどツェルメロのクラスであるべきだというのならば，集合は，ツェルメロの包括化公理を「$\bigcup\mho$」に相対化することによって特定化されてもよかったであろう．とくに，ツェルメロの分出〔公理〕型「$x \cap \alpha \in \mho$」は：

$$x \in \bigcup\mho . \supset . x \cap \alpha \in \bigcup\mho$$

となったであろうが，さらに，「α」にどのような抽象体を代入するにせよ，その抽象体を「$\bigcup\mho$」へ相対化するという条件がつくことになるであろう．あるいは，それと等値に，そのような相対化は，前の段落によれば，ある z に対して $\alpha = z$ を保証しているから，われわれは，まさに，単一の分出公理：

(i) $$x \in \bigcup\mho . \supset . x \cap z \in \bigcup\mho$$

を採用できたでもあろう．

ツェルメロのそれ以外の包括化公理：

$$\{x, y\}, \{u : u \subseteq x\}, \bigcup x \in \mho$$

(§38の(vii)参照)は，「$\cup\mathfrak{V}$」への直接的な相対化によって，要するに，フォン・ノイマンの体系に，次のように入りこむ：

(ii) $$x, y \in \cup\mathfrak{V} . \supset . \{x, y\}, \hat{u}(u \subseteq x), \cup x \in \cup\mathfrak{V}.$$

ツェルメロの無限公理「$N \in \mathfrak{V}$」に対応して，フォン・ノイマンは，要するに，集合性公理[1]：

(iii) $$N \in \cup\mathfrak{V}$$

を有している．彼は通常の外延性公理を有している．彼は，また，基底づけ公理(§39)をも有しているが，われわれはそれを随意の修飾品と考えよう．

置換公理型(§39の(vi))は，この新しい設定においては細心の注意に値する，なぜなら，それは大きすぎないクラスの存在を積極的に準備するものであったからである．その適応形：

(iv) $$\mathrm{Func}\, \alpha . x \in \cup\mathfrak{V} . \supset . \alpha``x \in \cup\mathfrak{V}$$

は，直接の相対化が措定するであろうよりもはるかに寛やかに集合を措定している，なぜなら，(iv)の「α」に代入されるべき抽象体が相対化されているという条件はないからである．しかし，結局，フォン・ノイマンは，単一の公理において表現されている，これとは異なるもっと驚くべき寛容化に落ちついている．それは，あるクラスがもし大きすぎなければ集合であることだけをいうのではなくて，とくに，クラスがすべての集合のクラスとおなじ大きさでないとき，かつそのときにかぎって，集合である，ことをいっている．すなわち，

(v) $$x \in \cup\mathfrak{V} . \equiv . x \prec \cup\mathfrak{V}.$$

これは(i)を含意し，したがって，公理としてのそれを消去する．なぜなら，(v)と(i)の仮定とにより，$x \prec \cup\mathfrak{V}$．しかるに，28.2により，$\cup\mathfrak{V} \preceq x \cap z . \supset . \cup\mathfrak{V} \preceq x$．したがって，$x \cap z \prec \cup\mathfrak{V}$．さらに，「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」のフォン・ノイマンの述語的形式によってさえも，$x \cap z \in \mathfrak{V}$；したがって，(v)に「$x \cap z$」を代入し，「$x \cap z \prec \cup\mathfrak{V}$」から，$x \cap z \in \cup\mathfrak{V}$を結論することができる，q. e. d.

(v)から，フォン・ノイマンが示したように，選択公理をうることさえできる．その本

1 §39の(v)との関連で注意したように，Zermeloの実際の公理は「$N \in \mathfrak{V}$」とは些細な点で違っていた．von Neumannの公理は「$N \in \cup\mathfrak{V}$」とはそれ以上に異なっていた；以下の二ページ目を見よ．

質的なアイディアは次の通りである．フォン・ノイマンの述語的な「$\hat{u}Fu \in \mho$」によって，いくぶん間接的ではあるが，$NO \in \mho$ をうる．24.4における「$NO \notin \mho$」へとわれわれを導いたブラリ-フォルティの逆理からの議論は，ここでは，「$NO \notin \cup\mho$」へ導くにすぎない．さて，これが，こんどは，(v)によって，$\cup\mho \preceq NO$ を与える．それゆえ，定義により，あらゆる集合を異なる順序数に割りあてる関数が存在する．だが，これは，NO の整列順序づけを考慮すると，集合の領域全体 $\cup\mho$ の整列順序づけを保証する．それから，われわれは選択公理をうるのである．

われわれは，公理(v)にもっと初等的な形式を与えることができる．$(y)(y \subseteq \cup\mho)$ なので，容易に，

$$\cup\mho \preceq x\,.\supset (y)(y \preceq x)$$

がえられる(28.1参照)．逆に，フォン・ノイマンの述語的な「$\hat{u}Fu \in \mho$」から，容易に，$\cup\mho \in \mho$ がえられる，その結果，6.11により，

$$(y)(y \preceq x) \supset . \cup\mho \preceq x.$$

結合すれば，「$(y)(y \preceq x)$」を「$\cup\mho \preceq x$」に，それゆえ，「$(\exists y)(x \prec y)$」を「$x \prec \cup\mho$」に代入できるのが分る．また，「$x \in \cup\mho$」は「$(\exists y)(x \in y)$」に帰着する．したがって，(v)は：

(vi) $$(\exists y)(x \in y) \equiv (\exists y)(x \prec y)$$

となる．

ちなみに，クラスは，大きすぎなければ，集合である，というアイディアは，ドイツ語の観点からは奇妙にぴったりしている．「Menge」は「集合」を表わすテクニカルなドイツ語であり，「Unmenge」は法外に多いことを表わすドイツ語特有な語である．

フォン・ノイマンの実際の体系は，私が記述してきたものとは外観で著しく異なっていた．彼は，元来は，クラスではなく，関数を扱い，クラスを関数から導出した．その体系を，メンバー性に焦点を合わせた集合論というもっと親しみのある形式へ作りなおしたのは，ベルナイス(1937, 1941)であった．それゆえ，私がこれまで記述していたような体系は，とくに，もし，ベルナイスとともに，われわれが選択公理を含意する公理(v)を避けて，むしろ，公理(iv)を固守するならば，フォン・ノイマン-ベルナイスの集合論として引用されるのがもっともよい．要約すれば，基底づけもまた別にして，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系は，(ii)—(iv)と，外延性公理「$x = y\,.\,x \in z\,.\supset.\,y \in z$」および，述語的にとられた〔公理〕型「$\hat{u}Fu \in \mho$」とから成る．

だが，要するにそうだ，というのにすぎない．フォン・ノイマンは，実際には，〔公理〕型を排除して有限箇の公理の表で切り抜けた；ベルナイスはそれにならった．とくに，包括化〔公理〕型「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」は，それを述語的にとると，そのかわりにちょうど七箇の包括化公理：

$$\text{(vii)} \qquad \mathfrak{E}\restriction \cup\mathfrak{V},\ \breve{x},\ \mathrm{cnv}_2\, x,\ \mathrm{cnv}_3\, x,\ x``\mathfrak{V},\ x\times \cup\mathfrak{V},\ x\cap \bar{y} \in \mathfrak{V}$$

を採用すれば，定理型として証明できる，ただし，$\mathrm{cnv}_2\, x$ と $\mathrm{cnv}_3\, x$ とは，

$$\{\langle u, \langle v, w\rangle\rangle : \langle v, \langle w, u\rangle\rangle \in x\}, \qquad \{\langle u, \langle v, w\rangle\rangle : \langle u, \langle w, v\rangle\rangle \in x\}$$

である．

私は，依然，文字についてはベルナイスに従わない．ベルナイスは，集合とクラスに対して区別のある変項を採用し，集合を，特別なクラスとしてではなく，クラスに対応するものとしてだけ扱っている．この点では，私は，むしろ，フォン・ノイマンとともに止まって，集合をそれに対応するクラスと同一視する[2]．無限公理については，われわれ三人はすべて異なる：私は「$\mathrm{N} \in \cup\mathfrak{V}$」を与えた，ベルナイスはデデキントの意味(§32)での無限集合を要請し，かつ，フォン・ノイマンは，もっとも包括的なメンバーをもっていない入れ籠型の集合を要請した．だが，問題はない；体系の残りのものが与えられると，われわれは，これらのおのおのを容易におのおのから導き出す(なぜなら，(vi)は，ベルナイスの場合に必要とされた選択公理を含意しさえするからである)．さらに，(vii)における私の一組の包括化公理は，ベルナイスのものとは異なり，ゲーデルの表現法(1940)により近い；だが，その趣旨はおなじである．

最後に，私が「$\hat{u}Fu$」，「$\mathfrak{V}$」，および「$\cup\mathfrak{V}$」に訴えていることは，その体系に他の表現方法では見られない特色を与える．しかしながら，二度ほど注意したように，これらは叙述上の仕組みにすぎない．したがって，私が定式化してきたような体系が，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系と私がよんでいるものである．

この体系は，ML がしたように，すべてのケースにおける数学的帰納法に直接に寄与してはいない；なぜなら，この体系は，ML のように，「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」の非述語的ケースを保証してはいないからである．だが，問題はない，というのは，ツェルメロの体系においては帰納法の問題は，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系においては(iii)となったところ

2 Gödel も，彼が 1940 年に，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系を改作した際に，おなじようにした．Gödel は集合に対する特別の変項をもっていたが，集合はクラスであった．上記 §33，註 1 を見よ．

のツェルメロの無限公理によって，すでに正面から処理されていたからである．まさに帰納法を保証する非述語的な「$\hat{u}Fu \in \mho$」が与えられたとしてさえも，これは無くてすませられるような公理ではない．なぜなら，無限公理なしでは，無限クラスの存在のツェルメロの体系における証明はないであろう；そして，それに類似したものがなければ，無限集合の存在のフォン・ノイマン-ベルナイスの体系における証明は存在しないであろうから．

もし，再び，「$y \preceq z$」を 11.1 および §42 のように定義するならば，カントールの定理「$z \prec \{x: x \subseteq z\}$」の証明は，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系においては成りたたない．なぜなら，その証明は，関数 w に対する $z \cap \{u: u \notin w`u\}$ の存在を要求するが，一方，包括化〔公理〕型「$\hat{u}Fu \in \mho$」の述語的な形式は，$w \in \cup\mho$ でなければ，その存在を保証しないからである．もし，他方，「$y \preceq z$」の定義を修正して：

(viii)　　「$y \preceq z$」は「$(\exists w)(\mathrm{Func}\, w \,.\, w \in \cup\mho \,.\, y \subseteq w``z)$」を表わす

と読むならば，§42 で注意した ML に対する「$z \prec \{x: x \subseteq z\}$」の証明は，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系において平行してなされうる．加えて，「$z \prec \{x: x \subseteq z\}$」からのカントールの逆理「$\mho \prec \mho$」の導出は，ML と同様ここでも，$\mho \notin \mho$ という事実によって避けられる．

「$z \prec \hat{x}(x \subseteq z)$」という形でのカントールの定理の証明は，再び，ML におけるように，ここでも，ある関数 w に対する $\hat{u}(u \in z \,.\, u \notin w`u)$ の非集合性のゆえに駄目になる．この点におけるこの体系と ML とのあいだの唯一の相違は，$\hat{u}(u \in z \,.\, u \notin w`u)$ の集合性の保証が失敗するその失敗の仕方にある．ML においてそれが失敗したのは，「$u \notin w`u$」が層別化されていないからである．いまそれが失敗するのは，$\hat{u}(u \in z \,.\, u \notin w`u)$ がそれの部分クラスであるか，あるいはそれより大きくないことが証明できるようなクラスが，一般に，手に入らないからである．とくに，z が集合ならば，「z」および「$\hat{u}(u \notin w`u)$」を (i) の「$x$」と「$z$」に代入することによって，たしかに $\hat{u}(u \in z \,.\, u \notin w`u)$ の集合性がえられる；したがって，カントールの定理は，「$z \prec \{x: x \subseteq z\}$」に加えて，形式：

(ix)　　$z \in \cup\mho \,.\supset.\, z \prec \hat{x}(x \subseteq z)$

において手に入る．ここでカントールの逆理が，再び，「$\cup\mho \prec \cup\mho$」という新しい形で脅かす；というのは，$\hat{x}(x \subseteq \cup\mho)$ は，実際に，$\cup\mho$ であるから．だが，この逆理の脅威は，(ix) を通して，単に，$\cup\mho \notin \cup\mho$ の帰謬法的証明を提供するだけである：集合のクラスは，この体系に対しては，集合ではない．（それは ML に対しては集合であった．）もちろん，

われわれは，このことをすでに(v)から知っていた.

さらに，ラッセルの逆理は，二つの形での点検を促がす.「$\{u : u \notin u\}$」を用いる形は，§42 で ML に対して注意したのとおなじように，振舞う.「$\hat{u}(u \notin u)$」を用いる形は，§42 におけるように，$\hat{u}(u \notin u) \notin \cup\mathfrak{V}$ を結論することをわれわれに要求する；$\hat{u}(u \notin u)$ がその部分クラスであるか，あるいはそれより大きくないことが証明できるようなクラスが欠けているために，その反対を証明する自明な方法はまったく存在しない.

44. 差異と比較

分出，「$\alpha \cap z \in \mathfrak{V}$」，はツェルメロの体系の中でもっとも特徴的な点である.「$\cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」はツェルメロの体系の公理とは矛盾する. それでも，「$\cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」は「$\alpha \cap z \in \mathfrak{V}$」自身と矛盾するわけではない.「$\cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」と「$\alpha \cap z \in \mathfrak{V}$」とは，単に，合わさって「$\alpha \cap \cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」となるにすぎない. なぜなら，それらはあきらかに「$\alpha \cap \cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」を含意するし，逆に，「$\alpha \cap \cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」からそれら双方が，次のようにしてえられるからである.「$\alpha \cap \cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」から「$\cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」をうるには，「$\cup\mathfrak{V}$」を「$\alpha$」に代入する.「$\alpha \cap \cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」から「$\alpha \cap z \in \mathfrak{V}$」をうるには，「$\alpha \cap z$」を「$\alpha$」に代入し，$z \cap \cup\mathfrak{V} = z$ であることを考えてみる.

だが，「$\alpha \cap \cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」が，こんどは，非述語的な包括化〔公理〕型「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」に帰着する；§42 の(iii)参照. したがって，集合と究極クラスの非述語的な骨骼的理論とよばれてよいもの，すなわち，外延性(「$x = y . x \in z . \supset . y \in z$」)を件なう「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」は，骨骼的なツェルメロの体系とよばれてよいもの，すなわち，外延性を伴なう「$\alpha \cap z \in \mathfrak{V}$」に対して，きわめて単純な関係に立つのが分る. その関係とは，ちょうど，一方が他方プラス「$\cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」，ということである. 集合とクラスの非述語的な骨骼的理論は，われわれが，ツェルメロのそれ以外の公理をつけ加えるかわりに，別の方向をとって，それから逸脱する公理「$\cup\mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」をつけ加えるならば，骨骼的なツェルメロの体系からえられるものである.

私が，ちょっと，集合とクラスの非述語的な骨骼的理論をこのように提示するのは，われわれが普通しないから，という理由によるにすぎない. 普通，われわれは，それをツェルメロの体系や NF や，あるいはその他同種類のものと同等なものとは考えずに，そのような体系の上に添加されるべきあるものと考えている. 集合とクラスの非述語的な骨骼的理論は，集合のクラス，$\cup\mathfrak{V}$，として何をとるかという問題を未解決のままに残す；したがって，添加する際に，われわれは，$\cup\mathfrak{V}$ として，NF またはツェルメロの領域，または任意の領域をとる. もしそれを NF の領域にとれば，ML がえられる. それをツェルメロ

の領域にとれば，フォン・ノイマンの体系にある程度似た体系がえられる．

そのような添加は，もちろん，単なる公理の追加ではない．拡大は拡張ではない(§ 42を見よ)．非述語的な骨骼的理論をツェルメロの全体系で補なうことは，単に，ツェルメロの全体系に「$\cup\mathfrak{V}\in\mathfrak{V}$」をつけ加えることであろうし，矛盾を生ぜしめるでもあろう．非述語的な骨骼的理論を添加すること(*superimposing*)によってツェルメロの体系を拡大するためには，われわれは，ツェルメロの包括化公理を「$\cup\mathfrak{V}$」に相対化して，それから，この結果を非述語的な骨骼的理論に加えようとするであろう．NF を ML へ拡大したとき，われわれは NF の包括化〔公理〕型を「$\cup\mathfrak{V}$」に相対化し，その結果を非述語的な骨骼的理論に加えた．それが，要するに，**非述語的な拡大**(*impredicative enlargement*)である．

ワン(1950)に負うところのひとつの議論は，そのような拡大がけっして矛盾を生ぜしめないことを示している．究極クラスをもたない無矛盾な集合論が与えられた場合，その公理が「$\cup\mathfrak{V}$」に対して相対化され，かつ，集合と究極クラスの非述語的な骨骼的理論の「$\hat{u}Fu\in\mathfrak{V}$」と「$x=y\,.\,x\in z\,.\supset.\,y\in z$」とが添加されるならば，その結果は，無矛盾であるであろう．とくに，これは，もし NF が無矛盾なら ML も無矛盾である，ことを意味している．具体的にするため，NF と ML の場合に対するワンの議論を私は素描するつもりである；だが，それは他の場合に対してもおなじである．

彼は，スコーレム-レーヴェンハイム(Skolem-Löwenheim)の定理に訴えるが，これは，量化〔言明〕型の無矛盾などんな集合も自然数の領域における解釈の下で真になる，ことをいっている．そこで，NF が無矛盾であると仮定しよう．変項が自然数を値域とするものと解釈しなおされ，かつ，「$\in$」が〔関係〕R を表現するものと解釈しなおされるときに，NF のすべての定理が真になるような数的関係 R が存在することになる．すると，とくに，外延性公理の次の系：

$$(z)(z\in x\,.\equiv.\,z\in y)\supset:x\in w\,.\equiv.\,y\in w$$

は，このように解釈しなおされるとき，真になる．そこで，もし数 x と y とが，まったくおなじ数が y に対するごとくに x に対して R をもつようなものであれば，x と y とは R によってはまったく区別できないことが分る．それゆえ，「$\in$」を R として，また，領域を数として解釈しなおすことは，たとえ，それらの数を次のようにして選び出す(*cull*)としても，相変らず NF を満足し続けるであろう[1]：まったくおなじ数が異なる数 $x_1, x_2, \ldots$

1　議論のこの局面においては，私は，むしろ，Wang, 1951, 289 ページ，による，ここで，彼は彼の 1950 年の証明のギャップを埋めている．

のおのおのに対して R をもつならば，$x_1, x_2, \ldots$ のうちの最小のものを除いて，すべてを棄てる．なぜなら，棄てられた数は残っている数から R においては区別できないからである．さて，ワンは，集合に対しては小文字の変項，クラスに対しては大文字の変項をもつ，ML の二種類変項的な表現法の定式化に進む．集合はクラスとみなされなくなり，ベルナイス(1937)のごとく，単にクラスに対応するようになる．集合の変項だけが「ϵ」の左側に許される．包括化〔公理〕型，集合性公理，および外延性公理(§42を見よ)は，それぞれ：

(i) $(\exists Y)(x)(x \epsilon Y . \equiv Fx)$,

(ii) $(\exists y)(x)(x \epsilon y . \equiv Fx)$ (「Fx」は層別化され，大文字をもっていない),

(iii) $(z)(z \epsilon x . \equiv . z \epsilon y) . Fx . \supset Fy$

となる．つぎに，この二種類変項的 ML の異なる解釈を，次のように考える．小文字の変項の値域は，上のように選び出された自然数を含むものにとろう．大文字の変項の値域は，小文字の変項の値域のすべての部分クラスを含むものにとろう．小文字の前の「ϵ」は R にとり，大文字の前の「ϵ」はメンバー性にとろう．この再解釈は(iii)を満足する；というのは，選び出してあるおかげで，$(z)(z \epsilon x . \equiv . z \epsilon y)$ のとき，x は y **である**から．さらに，再解釈は(ii)を満足する，というのは，「ϵ」を R とし，領域を選び出された数とすれば，NF は真になるからである．そして，最後に，再解釈は(i)を満足する，というのは，数のクラスの素朴な理論の無矛盾性をわれわれは仮定しているであろうから．かくして，二種類変項的 ML は無矛盾であるのが分る．議論の残りの部分は，二種類変項的 ML が無矛盾なので，本来の ML も無矛盾であることを示すという，月並みな事柄である．

この結果――もし NF が無矛盾なら ML も無矛盾であるということ――は，NF に興味をもち続けることに対する主な理由を具体的に表現している．なぜなら，ML は NF よりも満足のゆくものであるからである．それは，帰納法に関する限定を免かれているし，非-カントール的クラスという変則を免かれているし，カントールの定理についてのなんの制限も知らず，また，選択公理の不成立を克服している．そして，これらの利点は，究極クラスの附加によってあらゆる人に授けられるたぐいの便利さの単なる例証にすぎない．ML は NF よりはるかに便利なので，このようにより強くなることから当然結果すると思われるであろうような矛盾の危険という理由に，たぶん，よるのでなければ，ML は，た

しかに，はるかに好ましい．すると，NF が無矛盾なら ML も無矛盾であるという証明は，なんと歓迎すべきものであろうか．そして，NF よりももっと尤もらしいある理論が無矛盾であるということを条件として，ML が無矛盾であることの証明が求められるべきであるならば，そのような証明を求める最善の戦略は，もしこれら他の理論が無矛盾ならば，NF も無矛盾である，ことの証明を試みることである．

もし究極クラスをもたない体系が無矛盾ならば，その非述語的な拡大も無矛盾である，——それが，たったいま，NF と ML に対して議論したワンの定理である．他の関連においてモストウスキー (Mostowski)(112 ページ註)によって進められた議論は，さらに，任意の式は，もし，「$\mathrm{U}\mathfrak{V}$」に相対化されたときに，それが拡大された体系の定理となるならば，すでにもとの体系の定理である，ことを示すのに用いられうる．NF と (i)—(iii) という二種類変項的 ML とへ適用していい換えるならば，後者の体系のあらゆる定理は，大文字を欠くならば，また，NF の定理でもある，というのがその要点である．このように適用されるとき，モストウスキーの証明は次のようになる．$\mathfrak{F}$ を，NF において証明可能でない大文字をもたぬ任意の式とする．すると，新しい公理として $\mathfrak{F}$ の否定がつけ加えられた NF は無矛盾である．そのとき，ワンの定理により，この体系の非述語的拡大も無矛盾である．だが，それは，$\mathfrak{F}$ の否定がつけ加えられた二種類変項的 ML である．したがって，$\mathfrak{F}$ は二種類変項的 ML の定理ではない．

フォン・ノイマン-ベルナイスの理論のツェルメロの理論に対する関係は，ML の NF に対する関係とおなじではなく，また，ワンの定理を適用する際に要求されるであろうような関係とおなじでもない．フォン・ノイマン-ベルナイスの集合性に対する規定が，ツェルメロの体系の「$\mathrm{U}\mathfrak{V}$」への単なる相対化を超えていることを，§43 の (i) と (v) においてわれわれは見た．他方，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系は，もうひとつの部分において，ワンの定理が許容するであろうような強さ：非述語的な「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」，を有している．

フォン・ノイマン-ベルナイスの体系は，もしツェルメロの体系が無矛盾ならば，事実，無矛盾である，そして，これはワンの定理とは独立に知られている．こういう趣旨の議論はノヴァク (Novak) 嬢によって与えられ，もうひとつはロッサーとワン (124 ページ以下) によって与えられたが，この二人は，それを独立に発見したという功績をモストウスキーに帰している．ロッサーとワンの証明の要点というのは，「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」における述語性が，ある集合論に述語的につけ加えられたクラスに対しては，順序づけられた生成というポワ

ンカレの目的(§34)を達成する，ということである．§43の(vii)において注意したように，述語的につけ加えられたクラスのおのおのは，$\mathfrak{E}\upharpoonright \cup \mathfrak{V}$であるか，あるいは，前もって割りあてられたある$x$に対する$\breve{x}$，または$\mathrm{cnv}_2 x$，または$\mathrm{cnv}_3 x$，または$x``\mathfrak{V}$，または$x \times \cup \mathfrak{V}$であるか，あるいは，前もって割りあてられたある$x$と$y$に対する$x \cap \bar{y}$であるか，である．もしわれわれが自然数におけるモデルを認める集合論から始めるならば，上のようなクラスの順序づけられた生成によるその拡大もまた，簡単な配置変えによって，自然数におけるモデルを与えられる．したがって，もし基礎になっている集合論が無矛盾ならば，その拡大も無矛盾である．私は重要な細部を省略する；それら細部の中には，集合性に対するフォン・ノイマン-ベルナイスの規定がツェルメロの体系の単なる相対化を超えるというすでにのべた事実を調整することに関係しているものもある．その後，シェーンフィールド(Shoenfield)は，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系において矛盾の証明が与えられると，それによってツェルメロの体系において現に矛盾が生み出されるような直接的な規則(証明論の専門語でいう，『初等回帰的な』(primitive recursive)規則)を提出することによって，この証明に改良を加えた．

フォン・ノイマン-ベルナイスの体系においては，究極クラスにどんなにわずかな負担しか負わされていないか，これらの議論の性質から痛感される．それと異なる状況，非述語的な状況，についてのワンの定理は，いっそう驚くべきものとなるのである．自然数のクラスの素朴な理論が無矛盾である，というようなきわめて実質的な仮定をその証明が必要としたのは少しも不思議ではない．もちろん，その仮定さえも，NFやMLあるいは他の類似のものの無矛盾性の問題に比べたら，取るに足りないものである．

述語的な「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」が§43の(vii)におけるような七箇の単一な公理に分解できることは，述語的な仮定の弱さの反映のように見える．MLにおけるような非述語的な「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」は，たぶん，有限なケースの選択には還元できない．

それにもかかわらず，NFは有限個で公理化可能である．ヘイルペリン(Hailperin)は，その包括化〔公理〕型，要するに，層別化されている「Fu」をもつ「$\{u: Fu\} \in \mathfrak{V}$」を，その十箇の個別例からうる方法を示した．パトナム(Putnam)は，さらに進んで，それを一箇の個別例からうる方法を示している；彼は，どんなに多くの有限箇の包括化公理も，一箇の公理に帰着させうることを示している．彼の議論は，任意の二箇を次のようにして一箇に還元できる，というのである．まず，二箇はこのように描かれてもよい：

$$\{x: Fxy_1 \ldots y_m\}, \{x: Gxz_1 \ldots z_n\} \in \mathfrak{V}$$

ただし，「$Fxy_1...y_m$」と「$Gxz_1...z_n$」は，表記の自由変項をもつ特定の文を表わす．このとき，「p」が：

$$(y_1)...(y_m)(\{x: Fxy_1...y_m\} \in \mho)$$

を表わす場合には，その二箇を結びつけると，次の等値な単一の公理：

$$\{v: Fvw_1...w_m . \sim p .\mathbf{v}. Gvz_1...z_n . p\} \in \mho$$

にすることができる．

他方，集合論の小部分が，驚くほどつつましいものでありながら，しかも，有限に公理化できない，ということがありうる．モンテギュ(Montague)によって拡張された[2]，クライゼル(Kreisel)とワンの発見は，単一の原初的述語「ϵ」に基づく無矛盾な集合論は，もしそれが，

$$x \cap \alpha, x \cup \{y\} \in \mho, \qquad x = y . x \in z . \supset . y \in z$$

を備えているならば，有限に公理化できない，というのである．これらの規定はツェルメロの体系の部分をなしているので，とくに，ツェルメロの体系自身は，もしそれが無矛盾ならば，有限に公理化可能でない，ということが結果する[3]．フォン・ノイマンの有限に公理化された体系がツェルメロの体系の拡大であることを考えると，これは驚くべきことである．だが，それは拡大にすぎず，拡張でないことを想いおこされたい；拡張は，実際，モンテギュの結果によって，双方の体系を矛盾したものにするであろう．

有限の公理化の利点ともよべるようなものを放棄するとしても，§43におけるようなフォン・ノイマン-ベルナイスの体系は，「$\hat{u}Fu \in \mho$」が非述語的な場合に対しても開放されるときに，その魅力を失ないはしないと私は思う．いっそう美しくするためには，われわれは，§43の(iv)を，再び，(vi)でおきかえてもよい．いまでは，われわれがそれを正しくそうよぶことができるが，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系のこの非述語的な**拡張**は，集合性公理：

$$N \in \cup\mho, \qquad x \in \cup\mho .\equiv (\exists y)(x \prec y),$$
$$x, y \in \cup\mho .\supset. \{x, y\}, \hat{u}(u \subseteq x), \cup x \in \cup\mho$$

2　1957, 1961．私の定式化に齟齬が生じているのは，再び，私が非関与的な抽象を用いているためである．——余計な述語がないという規定は，Kleene の定理(『Two papers』)を考慮すると，本質的である：もし述語がつけ加えられるならば，任意の無矛盾な体系は有限に公理化された無矛盾な体系に拡張されうる．

3　この結果は，Montague が指摘しているように，1954年(McNaughton)に，もしくは，不十分な証明とともに，1952年と1953年(Wang, Mostowski)にさかのぼる．

と，非述語的な包括化〔公理〕型「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」および外延性公理とを有する[4]. 矛盾のおそれがあるというのならば，注意の範囲内に入るひとつの点は，上の公理のひとつにある「≺」である：その定義を 11.1 にか，それとも §43 の(viii)に基礎づけるかどうかである.

だが，この体系は，ML ともフォン・ノイマンの拡張されない体系とも，また究極クラスに訴える他の任意の体系とも，ひとつの重大な欠点を分けもっている：7.10 を犯し，13.1 についてはなにも語らないという，§7 で嘆かれた欠点である. 二つの価値が衝突している. 存在すると仮定されるすべてのものの——存在すると仮定されるどんな無限クラスさえもの——有限クラスを，なんとかして形成しうることを，われわれは欲している；そして，困難というのは，究極クラスが属さないであろうということである.

究極性の特徴を和らげること：結局のところ，究極クラスをあるクラスに属させるが，より小さいクラスにのみ属させるということ，によって，たぶん，ある種の和解をとり計らうことができよう. x を集合とよぶことは，もはや $(\exists y)(x \in y)$ をいうことではなく，$(\exists y)(x \in y \,.\, x \preceq y)$ をいうことであろう.

最後のところで，われわれは，$\cup\mathfrak{V}$ から離れて集合概念 $\mathfrak{M}$ の変形を考察してきた. そのような逸脱はまったく前例がないわけではない. アッケルマンは，$\mathfrak{M}$ が，$\cup\mathfrak{V}$ ともとられないし，また，いま考えられていたようなそれに代る方法でもとられないで，「$\in$」とともに未定義のままになっているような体系を提案している.

アッケルマンの体系に対しては，$\hat{u}Fu$ を $\mathfrak{M} \cap \{u : Fu\}$ として定義してもよい. すると，公理型のひとつは「$\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$」に等しくなる. 公理型のもうひとつは，要するに，集合性公理：

(iv) $$y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{M} \,.\!\supset.\, \hat{u}Fuy_1 \ldots y_n \in \mathfrak{M}$$
(「$Fuy_1 \ldots y_n$」はそれ以外の自由変項と「$\mathfrak{M}$」とをもたない)，

である. それは，隠れた束縛変項を集合へ制限することも必要としないし，もちろん，層別化の問題もない；かわりに，「$\mathfrak{M}$」が排除される. 加えて，アッケルマンは，事実上，二つの集合性公理：

$$\cup\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}, \qquad x \subseteq y \in \mathfrak{M} \,.\!\supset.\, x \in \mathfrak{M},$$

と普通の外延性公理とを有している. アッケルマンがそれからツェルメロの公理——§38

4 そのようなものが，およそ，Wang(1949)の体系 NQ (von Neumann-Quine)，もしくは，Stegmüller(1962)の BQ (Bernays-Quine)である.

の(vii)のすべての公理だけでなく，無限公理さえも――を導き出す方法を示しているので，この体系の評価は高まる[5]．これらツェルメロの公理はすべて，異なる変項を集合に限定するという仮定を有する，という程度に弱められている；それでも，ツェルメロの領域をアッケルマンの 𝔐 と同一視することによって，ツェルメロの体系のモデルがえられるのである．

アッケルマンの体系は，ツェルメロの体系とは異なり，存在を無制限に有限クラスに認めないという欠点を，ML ともフォン・ノイマンの体系とも分け合っている．だが，アッケルマンの体系においてもっとも受け入れ難いのは，つけ加えられた原初的述語「𝔐」(もしくは，それに対応する述語)の不粋さである．さらに，これは癒しえぬように思える．「𝔐」が式にあるかないかに(iv)がどれだけ依存しているかを見れば，「𝔐」を定義によって消去できるものとする望みはほとんどない．

45．体系の強さ

もしある演繹的体系が，その定理が他方の体系のすべての定理とそれ以上のものとを含むという点で，他方の体系の拡張であるならば，ある点で，一方は他方より強い．だが，この比較の基礎は二つの点で貧弱である．第1に，二つの体系のおのおのが他の体系にない定理をもっている場合には，それは成りたたない．第2に，それは，解釈の偶然性に依存していて，構造にのみ依存してはいない．そこで，些細な例をとるために，原初的な二座述語として，普通の同一性の公理と「R」の推移性の公理に服するような「$=$」と「R」だけを有する体系をわれわれがもっているものと仮定しよう；そして，反射性，「$(x)(xRx)$」，をつけ加えてその体系を拡張するものと仮定しよう．この拡張された体系は，その「R」をもとの「R」と等しいものとするかぎりでのみ，より強い．もしその「xRy」を，むしろ，もとの「R」を用いて「$x=y\ .\mathbf{v}.\ xRy$」と再解釈するならば，そのすべての定理は拡張されない体系において証明可能である．

外延性を，属性には仮定してしまわずに，クラスには保証するという，§35の(i)—(iv)で指摘されたラッセルの方法によって，それほど些細でない例が示唆される．外延性公理をもたない集合論が与えられるとき，その〔外延性〕公理をつけ加えることによって，われ

5　表面上では置換公理型も導出された；だが，Lévy は，『On Ackermann's set theory』で，その証明の誤まりを見つけた．Lévy は，さらに，もし Zermelo の体系が置換公理を加えても無矛盾であるならば，Ackermann の体系が無矛盾である，ことを示した．

われはその体系を拡張できるであろう；それでも，拡張された体系のすべての定理が，拡張されない体系ですでに証明可能である定理へラッセルの方法によって再解釈が可能であることを，われわれは示すことができよう．

したがって，強さの比較のより有意味な基準は，**再解釈的** (*reinterpretational*) な基準とよばれてもよいものである．もしひとつの体系の原初的な，論理には属さぬ記号——集合論に対しては，典型的には，まさしく「ϵ」——を再解釈して，その体系の全定理が他の体系の定理の翻訳となるようにすることができるならば，後者の体系は少くとも前者とおなじ強さである．もし逆の方向に同様なやり方をすることができなければ，一方の体系は他方の体系よりも強い．もちろん，同様なやり方が逆の方向にはできないことを示すのには，一般に困難がある．

それ以上に重要な意味での強さ——**順序数的な**強さ (*ordinal* strength) とよんでよいようなもの——は，次のきわめて数量的な尺度：それが存在するとはその体系が証明できない最小の超限順序数，を認める．もちろん，著しい欠陥のないどんな集合論も，超限順序数の存在を際限なく証明できるが，これは，それらすべてがえられることを意味するものではない．超限についてひじょうに特徴的なのは，われわれが，そのとき，ついにはわれわれの装置がなんらかの仕方でゆがんでもちきれなくなるまで，反復を反復し，そして，反復の反復を反復して，等々，続けてゆくということである；装置がゆがんでもちきれなくなった後の最小の超限順序数は，その装置がいかに強かったかということである．

順序数的な強さを増大させるというはっきりした目的で，ある体系につけ加えることのできる公理は，ω 以上の到達不可能数がある，という公理である (§30 の終りを見よ)．さらに，それ以上の到達不可能数を要請し，そして，つねに順序数的な強さを高めてゆくところの，この種のそれ以上の公理の際限のない系列が可能である．

体系の強さの尺度として順序数を使うもうひとつの方法もある．まず，フォン・ノイマンに従って[1]，順序数 x のおのおのに対して，そのメンバーがすべて x 以下のタイプに属するすべてのクラスを x 番目のタイプに帰することによって，累積的タイプ理論 (§38) を超限タイプへと拡張する．かくして，§38 の累積的タイプ理論の領域は，超限タイプを欠いているので，それ自身は，ω 番目のタイプである．集合論の公理が，領域をそのようなタイプにとることによって満足されるとき，モンテギュとヴォート (Vaught) はそのタイプを集合論の**自然的モデル** (*natural model*) とよんでいる．かくして，ツェルメロの集

1 1929. また，Bernays, 1948；Mendelson, 202 ページを見よ．

合論は，無限公理を欠くと，自然的モデルとして ω 番目のタイプをもつ；いまの言葉でいえば，§38において匂わされていたことがそれなのである[2]．最後に，与えられた集合論の（第2の意味での）順序数的な強さは，x 番目のタイプがその理論の自然的モデルであるような最小の順序数 x である．かくして，無限公理をもたないツェルメロの集合論の強さは，たかだか，ω である；だが，また，あきらかに ω 以下でもない；したがって，ω である．無限公理をもつツェルメロの集合論の強さは，タルスキーが指摘しているように(1956)，$\omega+\omega$ である．フォン・ノイマン-ベルナイスの体系の強さは，シェファードスンによれば，ω 以後の最小の到達不可能数よりひとつ大きい．

つぎに，相対的な強さの**証明論的**(*proof-theoretic*)基準に転ずる．ゲーデルは，完全な数論の不可能性の証明(1931)において，数について文字通り算術的に語りながら，事実上では，式と演繹的体系について語らせることを彼に許したような，今日よく知られている番号づけの方法を導入した．数論は集合論において展開できるので，これは，与えられた集合論の定理のクラス（実際には，定理のゲーデル数）がそのおなじ集合論で定義できることを意味し，そこではさまざまなことが集合論について証明できる．だが，ゲーデルは，彼の不完全性の定理の結果として，その集合論が，（もし無矛盾なら）自分自身の定理のクラスについて証明できないひとつのことというのはそのクラスが無矛盾であるということであるのを示した；すなわち，たとえば，「0=1」はそのクラスの中にはないということである．ひとつの集合論の無矛盾性がもうひとつの集合論において証明できるとき，（もちろん，双方が矛盾しているのでなければ）後者はより強い．ケメニー(Kemeny)は，このようにして，ツェルメロの体系がタイプ理論より強いことを示した[3]．

すると，任意の与えられた集合論から，おのおのが証明論的な意味でその先行者より強く，また，その先行者が無矛盾ならばおのおのが無矛盾であるような，それ以上の集合論の際限のない系列を生成する方法が手に入る．しなければならないことというのは，ゲーデルの番号づけによって，それ以前の公理が無矛盾であるという趣旨の新しい算術的な公理をつけ加えるということである．さらには，この公理の進行系列全体から単一の強い体系をつくることさえもできる；しかし，そのとき，以前と同様に，そのすべてが無矛盾であることを主張する新しい公理を加えて続けてゆくことができる．よく知られている超限

2　また，私の『Unification of universes』にも見られる．

3　ここでは，Zermelo の体系は置換公理型をもっていない；タイプ理論は，もちろん，超限タイプをもっていない；そして，双方は無限公理をもっている．Kemeny を見よ；また，Wang and McNaughton, 35ページも見よ．

回帰法のパターンが始まっているのがわれわれには分る．これらのラインに沿って特定化されて累積された公理の体系の強さは，われわれが公理のその無限な資源を特定化しつつある伝達手段の超限的回帰法の可能性——こんどは，順序数的な強さ——によってのみ制限されるにすぎない[4].

集合論の体系の強さを考える際に，われわれは，まず，領域の豊かさを考える．それが順序数的な強さである．それは，無限公理あるいは置換公理型によって増された強さである．それは，置換〔公理〕型のフォン・ノイマンの強化によって(§43)，あるいはまた，非述語的な拡張によって(§44)，フォン・ノイマンの集合と究極クラスの理論に対して獲得された強さである．

だが，体系を拡張することはその領域を豊かにすることを必要としない．それとは反対に，つけ加えられた公理が，貧弱になるように規制して，存在に関する未解決の問題を解決することもありうる．基底づけ〔公理〕はそれをした．また，連続体仮説も然りであった．

それがまた，ツェルメロの体系に対してフレンケルが提唱した**制限性公理**(*Beschränktheitsaxiom*)：他の公理によってそこに存在しなければならないもの以上に，その領域にはなにもない，という趣旨の公理，の意図であった．フレンケルはこれをはっきりした定式にはしなかったし，フォン・ノイマンはそれをする際の困難について論評した[5]．§33の終りで見た相対化の観念を借りて，厳密な**制限性**公理**型**を「$\mathfrak{A}\alpha \supset . \alpha = \mathfrak{V}$」として定式化できる，ただし，「$\mathfrak{A}\alpha$」は，残りの公理の連言の「$\{x : x \subseteq \alpha\}$」に対する相対化を表わす；だが，この表現法は，残りの公理の数が有限であることを要求するから，ツェルメロの体系に対する追加としてはうまくゆかない．しかし，フォン・ノイマンの体系とNFは有限に公理化可能なので(§44)，それは，これらに対する追加としてはうまくゆく．

§33の終りで論じたゲーデルの「$\cup\mathfrak{V} = \mathrm{L}$」は，その制限性〔公理〕型の近親である．この〔公理〕型のように，それ〔「$\cup\mathfrak{V} = \mathrm{L}$」〕は貧弱になるように規制する．もちろん，ゲーデルは，選択公理の無矛盾性と連続体仮説の無矛盾性を証明する過程で，「$\cup\mathfrak{V} = \mathrm{L}$」を受け入れたにすぎない；彼は，選択公理やより基礎的な公理に好意的であるようには，それに好意を寄せたのではなかった．それでも，概念的かつ存在論的節約の愛好者はそれに好意をもつこともできよう；そして，事実，それは構成可能性公理(axiom of constructibility)

4 無矛盾性の公理あるいは類似のものをつけ加えることによって体系を強めることについては，Gödel, 1931, 註48a参照；Rosser and Wang, 122ページ以下；Wang,『Truth definitions』；Feferman を見よ．

5 Fraenkel, *Einleitung*, 355ページ以下；von Neumann, 1925, 230ページ以下．

として引用されている．§33 で注意したように，それは，選択公理と連続体仮説を含意する．

選択公理が貧弱さに組するか，それとも，豊富さに組するかをいうのは難かしい．それは，たがいに素であるクラスの選択を欠いたすべてのクラスを拒否している．だが，それは選択を保証している．それは，貧弱さを指向しているゲーデルの「$\cup\mathfrak{V}=\mathrm{L}$」によって含意される．

内的モデルというアイディア（§33 参照）を利用する公理は，制限性と「$\cup\mathfrak{V}=\mathrm{L}$」と同様，いつも貧弱さを指向する，とはかぎらない．そのあるものは順序数的な強さに寄与する．特定化された内的モデルと領域を同一視することによって，あなたは事物を抑えつけている．だが，内的モデルを要請することによって，あるいは，それらが集合であると言明することによって，あなたは事物を押しあげることができる．かくして，公理の有限集合を有する集合論の体系が与えられているとし，「$\mathfrak{A}x$」を，再び，「$\{y: y\subseteq x\}$」に相対化されたそれらの連言を表わすものとしよう．制限性は，「$\mathfrak{A}x \supset . x=\mathfrak{V}$」を与えるであろう，それゆえ，もし $\mathfrak{V}\notin\mathfrak{V}$ なら，「$(x)\sim\mathfrak{A}x$」をも与えるであろう．だが，そのかわりに反対の考え方にたって $(\exists x)\mathfrak{A}x$，または $(\exists x)(x\in\cup\mathfrak{V} . \mathfrak{A}x)$ さえも，要請してもよかったであろう，そこからは，その体系の領域において，そうでなければ発見できないような，また，利用しうるその他のどんなものよりもたぶん大きいクラス x，さらには，たぶん集合 x の存在さえも含意されるのである．

ツェルメロの理論のようには，有限に多くの公理に引き下ろすことのできない理論に対しては，もちろん，このプランはうまくゆかないであろう．だが，次のように修正されればうまくゆくはずである．われわれは，もはや，すべての定理の連言を考えることはできないが，それでも，際限なく，公理の有限な連言のおのおのを別べつに考察することはできる，あるいは，もっと簡単にいえば，公理から結果する定理のおのおのを別べつに考察することはできる；そして，「$\mathfrak{A}_1x$」,「$\mathfrak{A}_2x$」, … が，別べつに，これらの相対化を表わしているものと考えることができる．すると，公理をその部分をおおっているものと考えて，おのおのの n に対してつけ加えられた公理として「$(\exists x)\mathfrak{A}_nx$」（あるいは，「$(\exists x)(x\in\cup\mathfrak{V} . \mathfrak{A}_nx)$」）を採用できる．レヴィ (Lévy)（『公理型』(Axiom schemata)）は，マーロ (Mahlo) とシェファードスンの業績に基づいて，この種の公理型が到達不可能数の急上昇を要請する公理型と等値でありうることを示した．

1961 年のベルナイスの体系，レヴィの体系の改良，はこの興味ある趨勢を十分例証し

てくれるであろう[6]. いわゆるクラスが，仮のものにすぎなかったベルナイスの1958年の体系と違って，これは，集合と実在的な量化可能なクラスとの理論である．その特徴的な公理型は，三つの点で，やはり，「$(\exists x)(x \in \cup \mathfrak{V} . \mathfrak{A}_n x)$」より強い：それは，さらに，$\cup x \subseteq x$と，

$$(y)(z)(y \subseteq z \in x . \supset . y \in x),$$

とを備え，「$\mathfrak{A}_n x$」で，単に定理だけではなく任意の真理の相対化をも表わすものとしている．やはり，非関与的な抽象というわれわれの用語では，それを次のように表わしてよい：

(i) $$p \supset (\exists x)(\cup x \subseteq x \in \cup \mathfrak{V} . Px . (y)(z)(y \subseteq z \in x . \supset . y \in x))$$

ただし，任意の文が「p」のところに入り，また，その文の「$\{y : y \subseteq x\}$」への相対化が「Px」のところに入る．加えて，ベルナイスは外延性公理と，要するに，集合性公理「$\{y, z\} \in \cup \mathfrak{V}$」とを採用している．彼は，要するに，MLにおけるような完全な非述語的な包括化〔公理〕型が結果することを示している：「$\alpha \cap \cup \mathfrak{V} \in \mathfrak{V}$」，あるいは「$\hat{u} Fu \in \mathfrak{V}$」(§42参照)．ツェルメロの和，巾クラス，分出，と無限(ここでは，「$\mathrm{N} \in \cup \mathfrak{V}$」)の包括化公理，および置換公理型とに対応している集合性公理に対しても同様である．そして，彼は，その体系が到達不可能数を生ぜしめるという点でレヴィの体系と等しいものであることを示している．

構成論的集合論(constructivistic set theory)に対しては，その手段が経済的である点に併せて，哲学的でも美学的でもあるような動機が存在する．そして，われわれは逆理の脅威をまさしく知っているので，方法論上の動機もまた存在する．古典的な数学をまったく窒息させてはしまわずに，できるだけ事物を抑えておくことに対して，これらすべての勧告が存在しているのである．そして，他方，事物を増すことに対する動機もある．ここでも，美学的な動機があることは，ほとんど疑うことができない．集合論の存在論における寛容さに対する実際上の動機というものも，またマクレーン(MacLane)が強調しているように(25ページ)，『含まれている大きな全体性(すべての群，すべての空間，すべての…)』のゆえに，抽象代数学と位相数学の側から感じられるようになりつつある．これ

6 それについての私の叙述は，彼の叙述とは著しく異なっている．これは，一部，私が非関与的な抽象という説明上の便宜を有するからである．そして，21ページと47ページとに現われる転回点の前で彼の論文を読むのをやめてはならない．

らの関連において，寛容な集合論であってさえも，もしそれが最大のクラスを排斥するような理論に入るならば，不適当であると判明することがありうる．したがって，存在や集合性をサイズの限界に依存させない ML や NF のようなあるものが珍重されてよいかもしれない．そのような体系を，いましがたほのめかしたレヴィとベルナイスの考案と結びつけようと試みるのもよかろう；なぜなら，これらの考案は，いまのところ最大のクラスを断念する集合論の枠内で効果を表わしているが，順序数的な強さを恐ろしく促進するものだからである．また，マクレーンは，必要に応じて最大のクラスのいくつかを救い出すためのアイディアを素描している．私は，この機会を利用し，集合論の最善の基礎づけという問題が，依然として，どれほど未解決であるかと感じつつ，読者に別れを告げたいと思う．

五箇の公理系概要

新しいタイプ理論:

包括化(§36(iv)): $(\exists y^{n+1})(x^n)(x^n \in y^{n+1} . \equiv Fx^n)$.

外延性(§36(v)): $(x^n)(x^n \in y^{n+1} .\equiv. x^n \in z^{n+1}) . y^{n+1} \in w^{n+2} .\supset. z^{n+1} \in w^{n+2}$.

付録(選択公理のほかに):

無限(§39(i)): $(\exists x^2)((\exists y^1)(y^1 \in x^2) . (y^1)(y^1 \in x^2 . \supset (\exists z^1)(y^1 \subset z^1 \in x^2)))$.

ツェルメロ:

巾集合, 一対化, 分出, 和(§38(vii)): $\{z : z \subseteq x\}$, $\{x, y\}$, $x \cap \alpha$, $\cup x \in \mathfrak{V}$.

外延性(§38(vii)): $x = y . x \in z .\supset. y \in z$.

無限(§39(v)): $(\exists x)(\Lambda \in x . (y)(y \in x .\supset. \{y\} \in x))$, あるいは, $\mathrm{N} \in \mathfrak{V}$.

付録(選択公理のほかに):

置換(§39(vi), 分出に代る): $\mathrm{Func}\, \alpha \supset. \alpha``x \in \mathfrak{V}$.

基底づけ(§39): $\mathrm{Fnd}\, \mathfrak{E}$.

New Foundations (NF):

包括化(§40(iii)): $\{x : Fx\} \in \mathfrak{V}$ (「Fx」は層別化されている).

外延性: $x = y . x \in z .\supset. y \in z$.

Mathematical Logic (ML):

包括化(§42(iii)): $\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$.

集合性(§42):「Fu」が層別化されるとともに,「$\cup \mathfrak{V}$」に相対化されている「$\hat{u}Fu \in \cup \mathfrak{V}$」.

外延性: $x = y . x \in z .\supset. y \in z$.

フォン・ノイマン-ベルナイス:

包括化(§43): $\hat{u}Fu \in \mathfrak{V}$ (「Fu」は「$\cup \mathfrak{V}$」に相対化されている)

あるいは有限に(§43(vii)): $\mathfrak{E} \restriction \cup \mathfrak{V}$, $\breve{x}$, $\mathrm{cnv}_2\, x$, $\mathrm{cnv}_3\, x$, $x``\mathfrak{V}$, $x \times \cup \mathfrak{V}$, $x \cap \bar{y} \in \mathfrak{V}$.

巾集合, 一対化, 和(§43(ii)): $x, y \in \cup \mathfrak{V} .\supset. \hat{u}(u \subseteq x)$, $\{x, y\}$, $\cup x \in \cup \mathfrak{V}$.

外延性: $x = y . x \in z .\supset. y \in z$.

無限(§43(iii)): $\mathrm{N} \in \cup \mathfrak{V}$.

置換(§43(iv)): $\mathrm{Func}\, \alpha . x \in \cup \mathfrak{V} .\supset. \alpha``x \in \cup \mathfrak{V}$.

付録:

基底づけ: $\mathrm{Fnd}\, \mathfrak{E}$.

強化法：

包括化：$\hat{u}Fu \in \mathcal{V}$ (無条件).

置換(§43(v))：$x \in \cup\mathcal{V} . \equiv . x \prec \cup\mathcal{V}$.

番号づきの式の一覧表

これらのページのしおりは，小数点番号のついた式を照合する労力を節約してくれるであろう．しかし，その節以外で，番号によって引用されることのなかった定理や定理型は省略する；したがって，このリストは，節内部での参照には使われるべきではない．

2.1　「$y \in \{x: Fx\}$」は「Fy」を表わす．

2.2　「$\alpha \subseteq \beta$」は「$(x)(x \in \alpha . \supset . x \in \beta)$」を表わす．

2.3　「$\alpha \subset \beta$」は「$\alpha \subseteq \beta \nsubseteq \alpha$」を表わす．

2.4　「$\alpha \cup \beta$」は「$\{x: x \in \alpha . \mathbf{v} . x \in \beta\}$」を表わす．

2.5　「$\alpha \cap \beta$」は「$\{x: x \in \alpha . x \in \beta\}$」を表わす．

2.6　「$\bar{\alpha}$」あるいは「$^{-}\alpha$」は「$\{x: x \notin \alpha\}$」を表わす．

2.7　「$\alpha = \beta$」は「$(x)(x \in \alpha . \equiv . x \in \beta)$」あるいは「$\alpha \subseteq \beta \subseteq \alpha$」を表わす．

2.8　「Λ」あるいは「$\{\ \}$」は「$\{z: z \neq z\}$」を表わす．

2.9　「$\mho$」は「$\{z: z = z\}$」あるいは「$^{-}\Lambda$」を表わす．

4.1　**公理**　$y = z . y \in w . \supset . z \in w.$

5.1　$\alpha = \{x: Fx\} . \equiv (x)(x \in \alpha . \equiv Fx).$

5.3　$\sim(x)(x \in y . \equiv . x \notin x).$

5.4　$\sim(x)(x \in y . \equiv \sim(x \in^2 x)).$

5.5　「$\{x: Fx\} \in \beta$」は「$(\exists y)(y = \{x: Fx\} . y \in \beta)$」を表わす．

6.1　$Fy \equiv (\exists x)(x = y . Fx).$

6.2　$Fy \equiv (x)(x = y . \supset Fx).$

6.4　$\alpha = \alpha.$

6.6　$\alpha = \beta . F\alpha . \supset F\beta.$

6.7　$\alpha = \beta . \supset . F\alpha \equiv F\beta.$

6.8　$x \in \mho.$

6.9　$\alpha \in \mho . \equiv (\exists x)(x = \alpha).$

6.11　$\alpha \in \mho . (x)Fx . \supset F\alpha,\quad \alpha \in \mho . F\alpha . \supset (\exists x)Fx.$

6.12　$\alpha \in \beta . \supset . \alpha \in \mho.$

6.13　$\alpha \in \{x: Fx\} . \equiv . \alpha \in \mho . F\alpha.$

6.14　$\alpha \notin \Lambda.$

6.15　$(x)(x \in \alpha) \equiv . \alpha = \mho,\quad (x)(x \notin \alpha) \equiv . \alpha = \Lambda.$

6.16　$(x)Fx \equiv . \{x: Fx\} = \mho . \equiv . \{x: \sim Fx\} = \Lambda.$

7.1 「$\{\alpha\}$」は「$\{z\colon z = \alpha\}$」を表わす，　「$\{\alpha, \beta\}$」は「$\{\alpha\} \cup \{\beta\}$」を表わす．

7.4 $\{x\} \subseteq \alpha \,.\!\equiv.\, x \in \alpha.$

7.6 $x \in \{x\}, \qquad x, y \in \{x, y\}.$

7.7 $\{x\} = \{y\} \,.\!\equiv.\, x = y.$

7.8 $\{x, y\} = \{z\} \,.\!\equiv.\, x = y = z.$

7.9 $\{x, y\} = \{x, w\} \,.\!\equiv.\, y = w.$

7.10 **公理** $\Lambda, \{x, y\} \in \mathcal{V}.$

7.11 $(\exists y)(x \in y).$

7.12 $\{\alpha\} \in \mathcal{V}.$

7.13 $\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{V}.$

7.14 $\alpha = z \,.\!\equiv (x)(z \in x \,.\!\supset.\, \alpha \in x).$

8.1 「$\bigcup\alpha$」は「$\{x\colon x \in^2 \alpha\}$」を表わす．

8.2 $\bigcup\{x\} = x.$

8.3 $\bigcup(\alpha \cup \beta) = \bigcup\alpha \cup \bigcup\beta.$

8.5 $\bigcup\alpha \subseteq \beta \,.\!\equiv (x)(x \in \alpha \,.\!\supset.\, x \subseteq \beta).$

8.6 $x \in \alpha \,.\!\supset.\, x \subseteq \bigcup\alpha.$

8.8 $\bigcup\mathcal{V} = \mathcal{V}.$

8.9 「$\bigcap\alpha$」は「$\{x\colon (y)(y \in \alpha \,.\!\supset.\, x \in y)\}$」を表わす．

8.13 $\beta \subseteq \bigcap\alpha \,.\!\equiv (x)(x \in \alpha \,.\!\supset.\, \beta \subseteq x).$

8.14 $x \in \alpha \,.\!\supset.\, \bigcap\alpha \subseteq x.$

8.15 $\bigcap\Lambda = \mathcal{V}.$

8.18 「$(\iota x)Fx$」は「$\bigcup\{y\colon (x)(Fx \equiv.\, x = y)\}$」を表わす．

8.20 $(x)(Fx \equiv.\, x = y) \supset\colon Fz \equiv.\, z = (\iota x)Fx.$

8.21 $y = (\iota x)(x = y).$

8.22 $\sim(\exists y)(x)(Fx \equiv.\, x = y) \supset.\, (\iota x)Fx = \Lambda.$

9.1 「$\langle\alpha, \beta\rangle$」は「$\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$」を表わす．

9.2 $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \,.\!\supset.\, x = z \,.\, y = w.$

9.3 $\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \,.\!\equiv.\, x = z \,.\, y = w.$

9.4 「$\{\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots\colon Fx_1x_2\ldots x_n\}$」は
「$\{z\colon (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(Fx_1x_2\ldots x_n \,.\, z = \ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots)\}$」を表わす．

9.5 $\langle z, w\rangle \in \{\langle x, y\rangle\colon Fxy\} \,.\!\equiv Fzw.$

9.6 「$\cdot\alpha$」は「$\{\langle x, y\rangle\colon \langle x, y\rangle \in \alpha\}$」を表わす．

9.7 $\cdot\alpha = \alpha \cap \cdot\mathcal{V}.$

9.8 $\cdot\alpha \subseteq \beta \,.\!\equiv (x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\supset.\, \langle x, y\rangle \in \beta).$

9.9 $\cdot\alpha = \cdot\beta \,.\!\equiv (x)(y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \,.\!\equiv.\, \langle x, y\rangle \in \beta).$

9.11 「$\alpha \times \beta$」は「$\{\langle x, y\rangle\colon x \in \alpha \,.\, y \in \beta\}$」を表わす．

9.12 「$\breve{\alpha}$」あるいは「$\breve{\ }\alpha$」は「$\{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in \alpha\}$」を表わす.

9.13 「$\alpha|\beta$」は「$\{\langle x, z\rangle : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \, . \, \langle y, z\rangle \in \beta)\}$」を表わす.

9.14 「$\alpha``\beta$」は「$\{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in \alpha \, . \, y \in \beta)\}$」を表わす.

9.15 「I」は「$\{\langle x, y\rangle : x = y\}$」を表わす.

9.16 「$\alpha\restriction\beta$」は「$\alpha \cap (\mathcal{V} \times \beta)$」を表わす.

9.17 「$\beta\upharpoonleft\alpha$」は「$\alpha \cap (\beta \times \mathcal{V})$」を表わす.

10.1 「$\mathrm{Func}\,\alpha$」は「$\alpha|\breve{\alpha} \subseteq I \, . \, \alpha = {}^{\cdot}\alpha$」あるいは
「$(x)(y)(z)(\langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \in \alpha \, .\!\supset\! . \, x = y) \, . \, \alpha = {}^{\cdot}\alpha$」を表わす.

10.2 「$\arg \alpha$」は「$\{x : (\exists y)(\alpha``\{x\} = \{y\})\}$」あるいは
「$\{x : (\exists y)(z)(\langle z, x\rangle \in \alpha \, .\!\equiv\! . \, z = y)\}$」を表わす.

10.3 $\mathrm{Func}\,\Lambda.$

10.4 $\mathrm{Func}\,I, \qquad \arg I = \mathcal{V}.$

10.5 $\mathrm{Func}\,\{\langle x, y\rangle\}.$

10.6 $\mathrm{Func}\,\alpha \, . \, \mathrm{Func}\,\beta \, . \supset \mathrm{Func}\,\alpha|\beta.$

10.7 $\mathrm{Func}\,\alpha \, . \, y \notin \breve{\alpha}``\mathcal{V} \, . \supset \mathrm{Func}\,\alpha \cup \{\langle x, y\rangle\}.$

10.8 $\mathrm{Func}\,\alpha \supset \mathrm{Func}\,\alpha \cap \beta.$

10.10 $\mathrm{Func}\,{}^{\cdot}\alpha \equiv . \, \breve{\alpha}``\mathcal{V} \subseteq \arg \alpha \, .\!\equiv\! . \, \breve{\alpha}``\mathcal{V} = \arg \alpha.$

10.10a $\mathrm{Func}\,\alpha \, . \, \breve{\alpha}``\mathcal{V} \subseteq \breve{\beta}``\mathcal{V} \, . \, \beta \subseteq \alpha \, .\!\supset\! . \, \alpha = \beta.$

10.11 「$\alpha`\beta$」は「$(\text{℩}y)(\langle y, \beta\rangle \in \alpha)$」を表わす.

10.15 $w \notin \arg \alpha \, .\!\supset\! . \, \alpha`w = \Lambda.$

10.17 $\mathrm{Func}\,{}^{\cdot}\alpha \equiv (x)(\alpha``\{x\} \subseteq \{\alpha`x\}).$

10.18 $x \in \arg \beta \, .\!\supset\! . \, (\alpha|\beta)`x = \alpha`(\beta`x).$

10.20 $\Lambda`\alpha = \Lambda.$

10.21 「$\lambda_x(\ldots x \ldots)$」は「$\{\langle y, x\rangle : y = \ldots x \ldots\}$」を表わす.

10.22 $\mathrm{Func}\,\lambda_x(\ldots x \ldots).$

10.23 $\ldots y \ldots \in \mathcal{V} \, .\!\equiv\! . \, y \in \arg \lambda_x(\ldots x \ldots).$

10.24 $\ldots y \ldots \in \mathcal{V} \, .\!\supset\! . \, \lambda_x(\ldots x \ldots)`y = \ldots y \ldots .$

10.25 「ι」は「$\lambda_x\{x\}$」を表わす.

10.26 $\iota`x = \{x\} \neq \Lambda.$

10.27 $x \in \arg \iota.$

10.28 $\langle \{x\}, y\rangle \in \iota \, .\!\equiv\! . \, x = y.$

10.29 $\breve{\iota}`\{x\} = x.$

11.1 「$\alpha \preceq \beta$」は「$(\exists x)(\mathrm{Func}\,x \, . \, \alpha \subseteq x``\beta)$」を表わす.

11.2 「$\alpha \simeq \beta$」は「$\alpha \preceq \beta \preceq \alpha$」を表わす.

12.1 「$\beta \leqq \alpha$」あるいは「$\alpha \geqq \beta$」は「$(z)(\alpha \in z \, . \, \breve{\iota}``z \subseteq z \, .\!\supset\! . \, \beta \in z)$」を表わす.

12.2 「$\beta < \alpha$」あるいは「$\alpha > \beta$」は「$\{\beta\} \leqq \alpha$」を表わす.

12.3 「N」は「$\{x: \Lambda \leqq x\}$」を表わす.

12.4 $x \leqq x.$

12.5 $x \leqq y \leqq z. \supset. x \leqq z.$

12.6 $x \leqq \{x\}.$

12.7 $x < \{x\}.$

12.8 $x < y \leqq z . \supset. x < z.$

12.9 $x < y . \supset. x \leqq y.$

12.10 $x < y < z . \supset. x < z.$

12.11 $x \leqq y . \supset: x = y . \vee (\exists z)(y = \{z\}).$

12.12 $w \leqq x . \equiv (z)(x \in z . (y)(\{y\} \in z . \supset. y \in z) . \supset. w \in z).$

12.14 $\Lambda \in \mathrm{N}.$

12.15 $x \in \mathrm{N} . \supset. \{x\} \in \mathrm{N}$ (すなわち, $\iota``\mathrm{N} \subseteq \mathrm{N}$).

12.16 $x \in \mathrm{N} . \supset: x = \Lambda . \vee (\exists y)(x = \{y\}).$

12.17 $x \leqq \Lambda . \equiv. x = \Lambda.$

12.18 $\sim(x < \Lambda).$

12.19 「$\{,,, \alpha\}$」は「$\{x: x \leqq \alpha\}$」を表わす.

12.20 $x \in \{,,, x\}.$

12.21 $\{,,, \Lambda\} = \{\Lambda\}.$

13.1 **公理型** $\mathrm{Func}\, \alpha \supset. \alpha``\{,,, x\} \in \mho.$

13.2 $\mathrm{Func}\, \alpha . \beta \subseteq \alpha``\{,,, x\} . \supset. \beta \in \mho.$

13.3 $\{,,, x\} \cap \alpha \in \mho.$

13.4 $\mathrm{Func}\, \alpha . \breve{\alpha}``\mho \subseteq \{,,, x\} . \supset. \alpha \in \mho.$

13.5 $x \in \alpha . (y)(\{y\} \in \alpha . \supset. y \in \alpha) . \supset. \{,,, x\} \subseteq \alpha.$

13.7 $Fw . (y)(Fy \supset F\{y\}) . w \leqq x . \supset Fx.$

13.9 $F\Lambda . (y)(Fy \supset F\{y\}) . x \in \mathrm{N} . \supset Fx.$

13.10 $F\Lambda . (y)(y \in \mathrm{N} . Fy . \supset F\{y\}) . x \in \mathrm{N} . \supset Fx.$

13.11 $x \leqq y . \equiv: x = y . \vee. x < y.$

13.12 $x < \{y\} . \equiv. x \leqq y.$

13.13 $x \leqq \{y\} . \equiv: x = \{y\} . \vee. x \leqq y$ (すなわち, $\{,,, \{y\}\} = \{,,, y\} \cup \{\{y\}\}$).

13.16 $x \in \mathrm{N} . \equiv: x = \Lambda . \vee. \Lambda < x.$

13.17 $x \in \mathrm{N} . \supset: \Lambda < x . \equiv. x \neq \Lambda.$

13.18 $x \leqq y \in \mathrm{N} . \supset. x \in \mathrm{N}.$

13.19 $x \in \mathrm{N} . \equiv. \{x\} \in \mathrm{N}.$

13.20 $x \in \mathrm{N} . \supset \sim(x < x).$

13.21 $x \in \mathrm{N} . \supset: x \leqq y \leqq x . \equiv. x = y.$

13.22 $x, y \in \mathrm{N} . \supset: x \leqq y . \equiv \sim(y < x).$

14.1 「Seq」は「$\{x\colon \mathrm{Func}\,x\,.\,(\exists y)(\breve{x}\text{“}\mho = \{,,,y\})\}$」を表わす.

14.2 「$\alpha^{|\beta}$」は「$\{\langle x, y\rangle\colon (\exists z)(z \in \mathrm{Seq}\,.\,\langle x, \beta\rangle, \langle y, \Lambda\rangle \in z\,.\,z|\iota|\breve{z} \subseteq \alpha)\}$」を表わす.

14.3 $\alpha^{|\Lambda} = I.$

14.6 $\alpha^{|\{x\}} = \alpha|\alpha^{|x}.$

14.7 $\alpha^{|\{\Lambda\}} = {}^{\cdot}\alpha.$

14.9 $x \notin \mathrm{N}\,.\supset.\,\alpha^{|x} = \Lambda.$

14.10 $\alpha^{|\{x\}} = \alpha^{|x}|\alpha.$

14.11 $x \in \mathrm{N}\,.\,\arg\alpha = \mho\,.\supset.\,\arg\alpha^{|x} = \mho.$

14.12 $\mathrm{Func}\,\alpha \supset \mathrm{Func}\,\alpha^{|x}.$

14.13 $I^{|x\text{‘}}\Lambda = \Lambda.$

15.1 「$^*\alpha$」は「$\{w\colon (\exists z)(w \in \alpha^{|z})\}$」を表わす.

15.2 $\langle x, x\rangle \in {}^*\alpha$ (すなわち, $I \subseteq {}^*\alpha$).

15.5 $\langle x, y\rangle \in \alpha\,.\,\langle y, z\rangle \in {}^*\alpha\,.\supset.\,\langle x, z\rangle \in {}^*\alpha$ (すなわち, $\alpha|{}^*\alpha \subseteq {}^*\alpha$).

15.7 $\alpha\text{“}\beta \subseteq \beta\,.\equiv.\,{}^*\alpha\text{“}\beta = \beta.$

15.10 $Fz\,.\,(x)(y)(\langle y, x\rangle \in \alpha\,.\,Fx\,.\supset Fy)\,.\,\langle w, z\rangle \in {}^*\alpha\,.\supset Fw.$

15.11 ${}^*\alpha = I \cup (\alpha|{}^*\alpha).$

15.13 $x \geqq y\,.\equiv.\,\langle x, y\rangle \in {}^*\iota.$

15.14 $\mathrm{N} = {}^*\iota\text{“}\{\Lambda\}.$

16.1 「$\alpha+\beta$」は「$\iota^{|\beta\text{‘}}\alpha$」を表わす.

16.2 「$\alpha\cdot\beta$」は「$(\lambda_x(\alpha+x))^{|\beta\text{‘}}\Lambda$」を表わす.

16.3 「α^β」は「$(\lambda_x(\alpha\cdot x))^{|\beta\text{‘}}\{\Lambda\}$」を表わす.

16.7 $x\cdot\Lambda = \Lambda.$

16.8 $y \in \mathrm{N}\,.\supset.\,x\cdot\{y\} = x+x\cdot y.$

16.12 $x \in \mathrm{N}\,.\supset.\,x\cdot y \in \mathrm{N}.$

16.14 $y \in \mathrm{N}\,.\supset.\,x \leqq x+y.$

16.18 $x, y \in \mathrm{N}\,.\supset.\,x+y = y+x.$

16.19 $x, y, z \in \mathrm{N}\,.\supset.\,(x+y)+z = x+(y+z).$

16.20 $x, y, z \in \mathrm{N}\,.\,x+z = y+z\,.\supset.\,x = y.$

16.25 $x \in \mathrm{N}\,.\supset.\,\{\Lambda\}\cdot x = x.$

16.26 $x, y \in \mathrm{N}\,.\supset.\,x\cdot y = y\cdot x.$

16.28 $x, y, z \in \mathrm{N}\,.\supset.\,(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z).$

16.29 $x, y \in \mathrm{N}\,.\supset\colon.\,x\cdot y = \Lambda\,.\equiv\colon x = \Lambda\,.\vee.\,y = \Lambda.$

16.30 $x, y \in \mathrm{N}\,.\,y \neq \Lambda\,.\supset.\,x < x+y.$

16.31 $x, y, z \in \mathrm{N}\,.\,x \leqq y\,.\supset.\,x\cdot z \leqq y\cdot z.$

16.32 $x, y, z \in \mathrm{N}\,.\,x\cdot z < y\cdot z\,.\supset.\,x < y.$

16.33 $x, y, z \in \mathrm{N}\,.\,z \neq \Lambda\,.\,x < y\,.\supset.\,x\cdot z < y\cdot z.$

16.34　$x, y \in \mathrm{N} \,.\, x \cdot x < y \cdot y \,.\supset .\, x < y.$

17.1　「$\alpha ; \beta$」は「$\alpha + (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta)$」を表わす.

17.4　$z, w \in \mathrm{N} \,.\supset : z ; w \in \{x ; y :\ x, y \in \mathrm{N} \,.\, Fxy\} \,.\equiv Fzw.$

18.1　「α / β」は「$\{z ; w :\ z, w \in \mathrm{N} \,.\, z \cdot \beta < \alpha \cdot w\}$」を表わす.

18.8　$x, y, z, w \in \mathrm{N} \,.\, \sim(z = w = \Lambda) \,.\supset : x/y \subseteq z/w \,.\equiv .\, z ; w \notin x/y.$

18.10　「Rat」は「$\{x/y : x, y \in \mathrm{N} \,.\, y \neq \Lambda\}$」を表わす.

18.12　「Real」は「$\{\bigcup z : z \subseteq \mathrm{Rat}\} \cap {}^{-}\{\{\Lambda\}/\Lambda\}$」を表わす.

18.13　$\mathrm{Rat} \subseteq \mathrm{Real}.$

20.2　「$\mathrm{Fnd}\, \alpha$」は「$(x)(x \subseteq \breve{\alpha}``x \,.\supset .\, x = \Lambda)$」を表わす.

20.3　「$\alpha \prec \beta$」あるいは「$\beta \succ \alpha$」は「$\sim(\beta \preceq \alpha)$」を表わす.

20.4　$\mathrm{Fnd}\, \alpha \supset .\, \langle x, x \rangle \notin \alpha.$

20.5　$\{x : \sim Fx\} \in \mathfrak{V} \,.\, \mathrm{Fnd}\, \alpha \,.\, (y)((x)(\langle x, y \rangle \in \alpha \,.\supset Fx) \supset Fy) \,.\supset Fz.$

20.6　$\{x : x \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V} \,.\, \sim Fx\} \in \mathfrak{V} \,.\, \mathrm{Fnd}\, \alpha \,.$
$(y)((x)(\langle x, y \rangle \in \alpha \,.\supset Fx) \,.\, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V} \,.\supset Fy) \,.\, z \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V} \,.\supset Fz.$

20.7　$\alpha \subseteq \beta \,.\, \mathrm{Fnd}\, \beta \,.\supset \mathrm{Fnd}\, \alpha.$

21.1　「$\mathrm{Connex}\, \alpha$」は「$(x)(y)(x, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V} \,.\supset .\, \langle x, y \rangle \in \alpha \cup \breve{\alpha} \cup I$」を表わす.

21.2　「$\mathrm{Ordg}\, \alpha$」は「$\alpha | \alpha \subseteq \alpha \subseteq {}^{-}I \,.\, \mathrm{Connex}\, \alpha$」を表わす.

21.4　「$\mathrm{Wellord}\, \alpha$」は「$\mathrm{Fnd}\, \alpha \,.\, \mathrm{Ordg}\, \alpha$」を表わす.

21.5　$\mathrm{Ordg}\, \alpha \,.\, x, y \in (\alpha \cup \breve{\alpha})``\mathfrak{V} \,.\, \alpha``\{x\} = \alpha``\{y\} \,.\supset .\, x = y.$

21.7　「$\beta 1 \alpha$」は「$\beta \in \alpha``\mathfrak{V} \,.\, \beta \notin \breve{\alpha}``\mathfrak{V}$」を表わす.

21.8　$\mathrm{Ordg}\, \alpha \,.\, x 1 \alpha \,.\, y 1 \alpha \,.\supset .\, x = y.$

21.9　$\mathrm{Wellord}\, \alpha \supset \mathrm{Wellord}\, \alpha \cap (\beta \times \beta).$

22.1　「$\acute{\mathrm{S}}$」は「$\lambda_x(x \cup \{x\})$」を表わす.

22.2　「C」は「$\lambda_x(\acute{\mathrm{S}}^{|x}\text{‘}\Lambda)$」を表わす.

22.8　「ω」は「${}^{*}\acute{\mathrm{S}}``\{\Lambda\}$」を表わす.

22.9　$\Lambda \in \omega.$

22.10　$\acute{\mathrm{S}}``\omega \subseteq \omega.$

22.11　$x \in \omega \,.\supset .\, x \cup \{x\} \in \mathfrak{V}.$

22.12　$x \in \omega \,.\supset .\, x \cup \{x\} \in \omega.$

22.13　「$\mathfrak{E}$」は「$\{\langle y, z \rangle :\ y \in z\}$」を表わす.

22.14　$\bigcup \beta \subseteq \beta \,.\supset .\, \mathfrak{E} \restriction \beta = \mathfrak{E} \cap (\beta \times \beta).$

22.15　「NO」は「$\{x :\ \bigcup x \subseteq x \,.\, \mathrm{Wellord}\, \mathfrak{E} \restriction x\}$」を表わす.

23.1　$\Lambda, \{\Lambda\} \in \mathrm{NO}.$

23.2　$\Lambda \neq x \in \mathrm{NO} \,.\supset .\, \Lambda \in x.$

23.3　$x \in \mathrm{NO} \,.\supset .\, x = \bigcup (x \cup \{x\}).$

23.4　$x \in \mathrm{NO} \,.\supset .\, x \notin x.$

23.5 $x \in \mathrm{NO} .\supset \sim(x \in^2 x)$.

23.6 $x \in y \in \mathrm{NO} .\supset. x \subset y$.

23.8 $x \in \mathrm{NO} .\supset. x \subset \mathrm{NO}$.

23.9 $\bigcup \mathrm{NO} \subseteq \mathrm{NO}$.

23.10 $x, y \in z \in \mathrm{NO} .\supset: x \in y .\mathbf{v}. y \in x .\mathbf{v}. x = y$.

23.11 $\alpha \subseteq \mathrm{NO} .\supset. \alpha \cap \bigcap \alpha = \Lambda$.

23.12 **公理型** $\mathrm{Func}\, \alpha . x \in \mathrm{NO} .\supset. \alpha “ x \in \mathfrak{V}$.

23.13 $\mathrm{Func}\, \alpha . x \in \mathrm{NO} . \beta \subseteq \alpha “ x .\supset \beta \in \mathfrak{V}$.

23.15 $\mathrm{Func}\, \alpha . \breve{\alpha} “ \mathfrak{V} \subseteq x \in \mathrm{NO} .\supset. \alpha \in \mathfrak{V}$.

23.16 $(y)((x)(x \in y .\supset Fx) . y \in \mathrm{NO} .\supset Fy) . z \in \mathrm{NO} .\supset Fz$.

23.18 $\alpha \subseteq \breve{\mathfrak{E}} “ \alpha .\supset. \alpha \cap \mathrm{NO} = \Lambda$.

23.19 $\bigcup \alpha \subseteq \alpha \subset z \in \mathrm{NO} .\supset. \alpha \in z$.

23.21 $x, y \in \mathrm{NO} .\supset: x \subseteq y .\mathbf{v}. y \subseteq x$.

23.22 $x, y \in \mathrm{NO} .\supset: x \subseteq y .\mathbf{v}. y \in x$.

23.23 $x, y \in \mathrm{NO} .\supset: x \in y .\mathbf{v}. y \in x .\mathbf{v}. x = y$.

23.24 $\bigcup \alpha \subseteq \alpha \subset \mathrm{NO} .\equiv. \alpha \in \mathrm{NO}$.

23.25 $\alpha \subseteq \mathrm{NO} .\supset: \bigcup \alpha \in \mathrm{NO} .\mathbf{v}. \bigcup \alpha = \mathrm{NO}$.

23.26 $x \in y \in \mathrm{NO} .\supset. x \cup \{x\} \in y .\mathbf{v}. x \cup \{x\} = y$.

23.27 $\Lambda \neq \alpha \subseteq \mathrm{NO} .\supset. \bigcap \alpha \in \alpha$.

24.3 $\mathrm{Wellord}\, \mathfrak{E} \upharpoonright \mathrm{NO}$.

24.4 $\mathrm{NO} \notin \mathfrak{V}$.

24.9 $x \in \mathrm{NO} .\supset. x \cup \{x\} \in \mathrm{NO}$.

25.1 「$\mathrm{SEQ}\, \alpha$」は「$\mathrm{Func}\, \alpha : \breve{\alpha} “ \mathfrak{V} \in \mathrm{NO} .\mathbf{v}. \breve{\alpha} “ \mathfrak{V} = \mathrm{NO}$」を表わす.

25.2 「$\mathrm{A}\gamma$」は「$\bigcup \{w : \mathrm{SEQ}\, w . (y)(y \in \breve{w} “ \mathfrak{V} .\supset. \langle w ‘ y, w \upharpoonright y \rangle \in \gamma)\}$」を表わす.

26.1 $\mathrm{Func}\, \mathrm{A}\gamma \upharpoonright y . \langle x, y \rangle \in \mathrm{A}\gamma .\supset. \langle x, \mathrm{A}\gamma \upharpoonright y \rangle \in \gamma . \mathrm{A}\gamma \upharpoonright y \in \mathfrak{V}$.

26.3 $\breve{\mathrm{A}\gamma} “ \mathfrak{V} \in \mathrm{NO} .\mathbf{v}. \breve{\mathrm{A}\gamma} “ \mathfrak{V} = \mathrm{NO}$.

26.4 $\mathrm{Func}\, \gamma \supset \mathrm{SEQ}\, \mathrm{A}\gamma$.

26.5 $\mathrm{Func}\, \gamma . y \in \breve{\mathrm{A}\gamma} “ \mathfrak{V} .\supset. \langle \mathrm{A}\gamma ‘ y, \mathrm{A}\gamma \upharpoonright y \rangle \in \gamma$.

26.6 $\mathrm{Func}\, \gamma . \breve{\mathrm{A}\gamma} “ \mathfrak{V} \in \mathfrak{V} .\supset. \mathrm{A}\gamma \notin \breve{\gamma} “ \mathfrak{V}$.

27.1 「Φ_α」は「$\{\langle x, z \rangle : \alpha “ \{x\} = z “ \mathfrak{V} :\cdot z = \Lambda .\supset x 1 \alpha\}$」を表わす.

27.2 「$\mathrm{e}\alpha$」は「$\mathrm{A}\Phi_\alpha$」を表わす.

27.3 「$\mathrm{Cor}\, \beta$」は「$\mathrm{Func}\, \beta . \mathrm{Func}\, \breve{\beta}$」を表わす.

28.1 $\alpha \subseteq \beta \preceq \gamma .\supset. \alpha \preceq \gamma$.

28.2 $\alpha \preceq \beta \subseteq \gamma .\supset. \alpha \preceq \gamma$.

28.7 $\alpha \preceq \{,,, x\} . \mathrm{Func}\, \beta .\supset. \beta “ \alpha \preceq \alpha$.

28.10 $\alpha \preceq \{,,, x\} .\supset. \alpha \in \mathfrak{V}$.

28.12 $\alpha \preceq \beta \preceq \{,,,x\} .\supset. \alpha \preceq \{,,,x\}$.

28.16 $\alpha \cap \{y : y \notin \beta`y\} \in \mathfrak{V} . \mathrm{Func}\, \beta .\supset: \{x : x \subseteq \alpha\} \nsubseteq \beta``\alpha$.

28.17 $(w)(\alpha \cap \{y : y \notin w`y\} \in \mathfrak{V}) \supset. \alpha \prec \{x : x \subseteq \alpha\}$.

29.1 「C_1」は「$(x)(y)(x \cap \bar{y},\ \breve{x},\ x``\mathfrak{V},\ x \upharpoonright y \in \mathfrak{V})$」を表わす.

29.2 「C_2」は「$(x)(y)(x|y,\ {}^{-}({}^{*}x``\bar{y}) \in \mathfrak{V} : (x \cup y)``\mathfrak{V},\ \breve{}(x \cup y)``\mathfrak{V} \in \mathfrak{V} .\supset. \cdot x \cup \cdot y \in \mathfrak{V})$」を表わす.

29.3 $\mathrm{C}_1 \supset (x)(y)(x \cap y,\ x``y \in \mathfrak{V})$.

30.1 「$\bar{\bar{\alpha}}$」あるいは「${}^{=}\alpha$」は「$\{x : x \in \mathrm{NO} . x \prec \alpha\}$」を表わす.

30.2 「NC」は「$\{x : x = \bar{\bar{x}}\}$」を表わす.

30.3 「ω_α」は「$\mathrm{e}(\mathfrak{E} \cap ((\mathrm{NC} \cap \overline{\omega}) \times \mathrm{NC}))`\alpha$」を表わす.

31.1 「$\beta\, \mathrm{Sln}\, \alpha$」は「$(y)(y \in \alpha . y \neq \Lambda .\supset (\exists x)(\beta \cap y = \{x\}))$」を表わす.

31.2 「$\mathrm{Ch}\, \alpha$」は「$\mathrm{Func}\, \breve{}(\mathfrak{E} \upharpoonright \alpha) \supset (\exists w)(w\, \mathrm{Sln}\, \alpha)$」を表わす.

32.1 $\mathrm{C}_1 . \mathrm{Func}\, y . \beta\, \mathrm{Sln}\, \{z : (\exists w)(z = \breve{y}``\{w\})\} .\supset. \mathrm{Cor}\, y \upharpoonright \beta . (y \upharpoonright \beta)``\mathfrak{V} = y``\mathfrak{V}$.

32.3 $\mathrm{C}_1 . \beta\, \mathrm{Slr}\, \{x : x \subseteq z\} . w = \mathrm{A}\Psi_{\beta z} .\supset. \mathrm{Cor}\, w . w``\mathfrak{V} = z . \breve{w}``\mathfrak{V} \in \mathrm{NO}$.

また，§6からの下記のものにも注意されたい.

「$\hat{u}Fu$」は「$\{u : (\exists z)(u \in z) . Fu\}$」あるいは「$\cup\mathfrak{V} \cap \{u : Fu\}$」を表わす，

「V」は「$\hat{u}(u = u)$」あるいは「$\cup\mathfrak{V}$」を表わす，

「$\iota\alpha$」は「$\hat{u}(u = \alpha)$」を表わす.

参　考　文　献

このリストは，本書中で，たまたま書名
その他によって触れられた著作だけを含む．

Ackermann, Wilhelm, "Zur Axiomatik der Mengenlehre," *Mathematische Annalen 131* (1956), 336–345.

——— Hilbert も見よ．

Bachmann, Heinz, *Transfinite Zahlen* (Berlin: Springer, 1955).

Bar-Hillel, Fraenkel を見よ．

Behmann, Heinrich, *Mathematik und Logik* (Leipzig, 1927).

Bernays, Paul, "A system of axiomatic set theory," *Journal of Symbolic Logic 2* (1937), 65–77; *6* (1941), 1–17; *7* (1942), 65–89, 133–145; *8* (1943), 89–106; *13* (1948), 65–79; *19* (1954), 81–96.

———"Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der Axiomatischen Mengenlehre," A. Robinson 編, Fraenkel に捧げられた *Essays on the Foundation of Mathematics* (Jerusalem: Hebrew University, 1961) に所載．

———and A. A. Fraenkel, *Axiomatic Set Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1958).

——— Hilbert も見よ．

Burali-Forti, Cesare, "Una questione sui numeri transfiniti," *Rendiconti di Palermo 11* (1897), 154–164. 英訳が van Heijenoort に収録．

Cantor, Georg, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo 編 (Berlin, 1932). もっとも関係のある論文は 1878–1899 年のものである．

Carnap, Rudolf, *The Logical Syntax of Language* (London and New York, 1937; 紙表紙本, Paterson, N. J.: Littlefield and Adams, 1960).

Church, Alonzo, *The Calculi of Lambda Conversion* (Princeton, 1941).

———*Introduction to Mathematical Logic* (Princeton: Princeton University Press, 1956).

Chwistek, Leon, "The theory of constructive types," *Annales de la Société Polonaise de Mathématique 2* (1924), 9–48; *3* (1925), 92–141.

Cohen, P. J., "The independence of the continuum hypothesis," *Proceedings of the National Academy of Sciences 50* (1963), 1143–1148; *51* (1964), 105–110.

Dedekind, Richard, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Brunswick, 1872).

——*Was sind und was sollen die Zahlen?* (Brunswick, 1888). 河野訳『数について』岩波文庫.

Feferman, Solomon, "Transfinite recursive progressions of axiomatic theories," *Journal of Symbolic Logic 27* (1962年のものを1963年に刊行), 259–316.

Fraenkel, A. A., *Einleitung in die Mengenlehre* (3版, Berlin, 1928).

——*Abstract Set Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1953; 2版, 1961).

——"Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms," *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, phys.-math. Kl., 1922, 253–257.

——"Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre," *Mathematische Annalen 86* (1922), 230–237.

——and Y. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1959).

—— Bernays も見よ.

Frege, Gottlob, *Begriffsschrift* (Jena, 1879). 英訳が van Heijenoort に収録.

——*Die Grundlagen der Arithmetik* (Breslau, 1884); J. L. Austin による英訳, *The Foundations of Arithmetic* (2版, Oxford: Blackwell, 1953; 紙表紙本, New York: Harper, 1960).

——*Grundgesetze der Arithmetik* (Jena: vol. 1, 1893; vol. 2, 1903).

Gal, Novak を見よ.

Gödel, Kurt, *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (Princeton, 1940). 近藤洋逸訳『数学基礎論』伊藤書店, 1946.

——"Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls," *Monatshefte für Mathematik und Physik 37* (1930), 349–360. 英訳が van Heijenoort に収録.

——"Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme," *Monatshefte für Mathematik und Physik 38* (1931), 173–198. 英訳が van Heijenoort に収録.

Grelling, Kurt, *Mengenlehre* (Leipzig, 1924).

——and L. Nelson, "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti," *Abhandlungen der Fries'schen Schule 2* (1907–8), 300–334.

Hailperin, Theodore, "A set of axioms for logic," *Journal of Symbolic Logic 9* (1944), 1–19.

Halmos, Paul, *Naive Set Theory* (Princeton: van Nostrand, 1960).

Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914).

Henkin, Leon, "Completeness in the theory of types," *Journal of Symbolic Logic 15*

(1950), 81–91.

Herbrand, Jacques, *Recherches sur la Théorie de la Démonstration* (Warsaw, 1930).

Hessenberg, Gerhard, *Grundbegriffe der Mengenlehre* (Göttingen, 1960).

Hilbert, D., and W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928; 2版, Berlin: Springer, 1938; 3版, 1949); 2版の英訳, *Principles of Mathematical Logic* (New York: Chelsea, 1950). 伊藤誠訳『記号論理学の基礎』大阪教育図書, 1954.

———and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik* (Berlin, vol.1, 1934; vol.2, 1939).

Kemeny, J. G., "Type Theory versus Set Theory," 学位論文, Princeton, 1949; 要旨, *Journal of Symbolic Logic 15* (1950), 78.

Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics* (New York: van Nostrand, 1952).

———"Two papers on the predicate calculus," *Memoirs of the American Mathematical Society* (1952), No. 10.

König, Julius, "Ueber die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem," *Mathematische Annalen 61* (1905), 156–160. 英訳が van Heijenoort に収録.

Kreider, D. L., and H. Rogers, Jr., "Constructive versions of ordinal number classes," *Transactions of the American Mathematical Society 100* (1961), 325–369.

Kreisel, G., "La prédicativité," *Bulletin de la Société Mathematique de France 88* (1960), 371–391.

———and H. Wang, "Some applications of formalized consistency proofs," *Fundamenta Mathematicae 42* (1955), 101–110.

Kuratowski, Casimir, "Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles," *Fundamenta Mathematicae 2* (1920), 161–171.

Lévy, Azriel, "On Ackermann's set theory," *Journal of Symbolic Logic 24* (1959年のものを1960年に刊行), 154–166.

———"Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory," *Pacific Journal of Mathematics 10* (1960), 223–238.

Lindenbaum, A., and A. Mostowski, "Ueber die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms und einiger seiner Folgerungen," *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, Classe III, *31* (1938), 27–32.

——— Tarski も見よ.

MacLane, Saunders, "Locally small categories and the foundations of set theory," *Infinitistic Methods*, proceedings of a 1959 symposium (Warsaw, 1961), pp. 25–34, に所載.

McNaughton, Robert, "A non-standard truth definition," *Proceedings of the American Mathematical Society 5* (1954), 505–509.

——— Wang も見よ.

Mahlo, P., "Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen," *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaft zu Leipzig* (*math.-ph. Kl.*) *64* (1912), 108–112; *65* (1912–3), 268–282.

Martin, R. M., "A homogeneous system for formal logic," *Journal of Symbolic Logic* *8* (1943), 1–23.

Mendelson, Elliot, *Introduction to Mathematical Logic* (Princeton: Van Nostrand, 1964).

———"The axiom of Fundierung and the axiom of choice," *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 4* (1958), 65–70.

Mirimanoff, D., "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles," *L'Enseignement Mathématique 19* (1917), 37–52.

Montague, Richard, "Non-finite axiomatizability," *Summaries of Talks at Summer Institute for Symbolic Logic* (Ithaca: 謄写版, 1957), pp. 256–259.

———"Semantical closure and non-finite axiomatizability, "*Infinitistic Methods*, proceedings of a 1959 symposium (Warsaw, 1961), pp. 45–69, に所載.

———and R. L. Vaught, "Natural models of set theories," *Fundamenta Mathematicae 47* (1959), 219–242.

Mostowski, Andrzej, "Some impredicative definitions in the axiomatic set theory," *Fundamenta Mathematicae 37* (1950–51), 111–124.

———"On models of axiomatic systems," *Fundamenta Mathematicae 39* (1952年のものを 1953 年に刊行), 133–158.

——— Lindenbaum も見よ.

Myhill, John, "A derivation of number theory from ancestral theory," *Journal of Symbolic Logic 17* (1952), 192–197.

Nelson, Grelling を見よ.

Neumann, J. von, "Zur Einführung der transfiniten Zahlen," *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae* (*sect. scient. math.*) *1* (1923), 199–208. 英訳が van Heijenoort に収録.

———"Eine Axiomatisierung der Mengenlehre," *Journal für reine und angewandte Mathematik 154* (1925), 219–240; *155* (1926), 128. 英訳が van Heijenoort に収録.

———"Zur Hilbertschen Beweistheorie," *Mathematische Zeitschrift 26* (1927), 1–46.

———"Die Axiomatisierung der Mengenlehre," *Mathematische Zeitschrift 27* (1928), 669–752.

———"Ueber die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der

allgemeinen Mengenlehre," *Mathematische Annalen 99* (1928), 373-391.

——— "Ueber eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre," *Journal für reine und angewandte Mathematik 160* (1929), 227-241.

Novak, I. L. (Mrs. Steven Gal), "A construction for models of consistent systems," *Fundamenta Mathematicae 37* (1950-51), 87-110.

Oberschelp, Arnold, "Untersuchungen zur mehrsortigen Quantorenlogik," *Mathematische Annalen 145* (1962), 297-333.

Ono, Katuzi, "A set theory founded on unique generating principle," *Nagoya Mathematical Journal 12* (1957), 151-159.

Parsons, Charles, "A note on Quine's treatment of transfinite recursion," *Journal of Symbolic Logic 29* (1964), 179-182.

Peano, Giuseppe, *Arithmetices Principia* (Turin, 1889). 英訳が van Haijenoort に収録.

——— *Formulaire de Mathématiques* (Paris, 1901).

——— "Super theorema de Cantor-Bernstein," *Rendiconti di Palermo 21* (1906), 360-366;『追加』とともに *Revista de Mathematica 8* (1902-6), 136-157, に再録.

——— "Sulla definizione di funzione," *Atti della Reale Accademia dei Lincei* (*Rendiconti, classe di scienza*) *20* (1911), 3-5.

Poincaré, Henri, "Les mathématiques et la logique," *Revue de Métaphysique et de Morale 13* (1905), 815-835; *14* (1906), 17-34, 294-317.

Putnam, Hilary, "Axioms of class existence," *Summaries of Talks at Summer Institute for Symbolic Logic* (Ithaca: 謄写版, 1957), pp. 271-274, に所載.

Quine, W. V., *A System of Logistic* (Cambridge, Mass., 1934).

——— *Mathematical Logic* (New York, 1940; 改訂版, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1951; 紙表紙本, New York: Harper, 1962).

——— *O Sentido da Nova Lógica*, 1942 年のブラジルでの講義 (São Paulo: Martins, 1944); Mario Bunge によるスペイン語訳, *El Sentido de la Nueva Lógica* (Buenos Aires: Nueva Visión, 1958).

——— *Methods of Logic* (New York: Holt, 1950; 改訂版, Holt, Rinehart, and Winston, 1959). 中村・大森訳『論理学の方法』岩波書店, 1961.

——— *Word and Object* (Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1960).

——— *Selected Logic Papers* (New York: Random House, 1966).

——— "A theory of classes presupposing no canons of type," *Proceedings of the National Academy of Sciences 22* (1936), 320-326.

——— "On the axiom of reducibility," *Mind 45* (1936), 498-500.

——— "New foundations for mathematical logic," *American Mathematical Monthly 44* (1937), 70-80; 追加とともに Quine, *From a Logical Point of View* (Cambridge,

Mass.: Harvard University Press, 2 版, 1961) に再録.

———"Whitehead and the rise of modern logic," P. A. Schilpp 編, *The Philosophy of A. N. Whitehead* (Evanston, Ill., 1941), pp. 125–163, に所載. 『Selected Logic Papers』 に再録.

———"On universals," *Journal of Symbolic Logic 12* (1947), 74–84.

———"On ω-inconsistency and a so-called axiom of infinity," *Journal of Symbolic Logic 18* (1953), 119–124. 『Selected Logic Papers』 に再録.

———"Unification of universes in set theory," *Journal of Symbolic Logic 21* (1956), 267–279.

———"A basis for number theory in finite classes," *Bulletin of the American Mathematical Society 67* (1961), 391f.

———and Hao Wang, "On ordinals," *Bulletin of the American Mathematical Society 70* (1964), 297f.

Ramsey, F. P., "The foundations of mathematics," *Proceedings of the London Mathematical Society 25* (1925), 338–384; Ramsey, *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays* (London, 1931; 紙表紙本, Paterson, N. J.: Littlefield and Adams, 1960) に再録.

Richard, Jules, "Les principes des mathématiques et le problème des ensembles," *Revue générale des sciences pures et appliquées 16* (1905), 541. 英訳が van Heijenoort に収録.

Robinson, R. M., "The theory of classes. A modification of von Neumann's system," *Journal of Symbolic Logic 2* (1937), 29–36.

Rogers, Kreider を見よ.

Rosser, J. B., *Logic for Mathematicians* (New York: McGraw-Hill, 1953).

———"The Burali-Forti paradox," *Journal of Symbolic Logic 7* (1942), 1–17.

———"The axiom of infinity in Quine's New Foundations," *Journal of Symbolic Logic 17* (1952), 238–242.

———Review of Specker (1953), *Journal of Symbolic Logic 19* (1954), 127f.

———and Hao Wang, "Non-standard models for formal logic," *Journal of Symbolic Logic 15* (1950), 113–129.

Rubin, Herman and J. E., *Equivalents of the Axiom of Choice* (Amsterdam: North-Holland, 1963).

Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics* (Cambridge, England, 1903; 2 版, New York, 1938).

———*Introduction to Mathematical Philosophy* (London, 1919). 平野訳『数理哲学序説』岩波文庫

———"On denoting," *Mind 14* (1905), 479–493; Russell, *Logic and Knowledge* (London: Allen and Unwin, 1956) と Feigl and Sellars 編, *Readings in Philosophical Analysis* (New York: Appleton-Century-Crofts, 1949) に再録.

———"On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types," *Proceedings of the London Mathematical Society 4* (1906), 29–53.

———"Mathematical logic as based on the theory of types," *American Journal of Mathematics 30* (1908), 222–262; Russell, *Logic and Knowledge* (London: Allen and Unwin, 1956) に再録.

——— Whitehead も見よ.

Scott, Dana, "Quine's individuals," E. Nagel 他 編, *Logic, Methodology, and Philosophy of Science* (Stanford: Stanford University Press, 1962), pp. 111–115, に所載.

Shepherdson, J. C., "Inner models for set theory," *Journal of Symbolic Logic 16* (1951), 161–190; *17* (1952), 225–237; *18* (1953), 145–167.

Shoenfield, J. R., "A relative consistency proof," *Journal of Symbolic Logic 19* (1954), 21–28.

Sierpiński, Wacław, *Cardinal and Ordinal Numbers* (Warsaw, 1958).

———"Une remarque sur la notion d'ordre," *Fundamenta Mathematicae 2* (1921), 199f.

———"L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix," *Fundamenta Mathematicae 34* (1947), 1–5.

Skolem, Thoralf, "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre," *Conférences au* 5*e. Congrès* (*1922*) *des Mathématiciens Scandinaves* (Helsingfors, 1923), pp. 218–232, に所載. 英訳が van Heijenoort に収録.

———"Ueber einige Grundlagenfragen der Mathematik," *Skrifter Utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Kl. 1* (1929), No. 4.

Specker, Ernst, "The axiom of choice in Quine's New foundations for mathematical logic," *Proceedings of the National Academy of Sciences 39* (1953), 972–975.

———"Dualität," *Dialectica 12* (1958), 451–465.

———"Typical ambiguity," E. Nagel 他 編, *Logic, Methodology, and Philosophy of Science* (Stanford: Stanford University Press, 1962), pp. 116–124, に所載.

Stegmüller, Wolfgang, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, beruhend auf den Systemen von Bernays und Quine," M. Käsbauer 他 編, Britzelmayr に捧げられた *Logik und Logikkalkül* (Freiburg: Verlag Alber, 1962), pp. 57–103, に所載.

Suppes, Patrick, *Axiomatic Set Theory* (Princeton: van Nostrand, 1960).

Tarski Alfred, *Logic, Semantics, Metamathematics*: *Papers from 1923 to 1938*,

J. H. Woodger による英訳 (Oxford: Clarendon Press, 1956).

———"Ueber unerreichbare Kardinalzahlen," *Fundamenta Mathematicae 16* (1938), 68–89.

———"Notions of proper models for set theories," *Bulletin of the American Mathematical Society 62* (1956), 601.

———and A. Lindenbaum, "Communication sur les recherches de la théorie des ensembles," *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* (*classe III*), *19* (1926), 299–330.

van Heijenoort, J. 編, *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967).

Vaught, Montague を見よ.

von Neumann, Neumann を見よ.

Wang, Hao, *A Survey of Mathematical Logic* (Peking, 1962; Amsterdam: North-Holland, 1963).

———"On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory," *Proceedings of the National Academy of Sciences 35* (1949), 150–155.

———"A formal system of logic," *Journal of Symbolic Logic 15* (1950), 25–32.

———"Arithmetic translations of axiom systems," *Transactions of the American Mathematical Society 71* (1951), 283–293.

———"The irreducibility of impredicative principles," *Mathematische Annalen 125* (1952), 56–66.

———"Truth definitions and consistency proofs," *Transactions of the American Mathematical Society 73* (1952), 243–275; Wang, *Survey* に再録.

———"The axiomatization of arithmetic," *Journal of Symbolic Logic 22* (1957), 145–158; Wang, *Survey* に再録.

———"Eighty years of foundational studies," *Dialectica 12* (1958), 466–497; Wang, *Survey* に再録.

———and R. McNaughton, *Les Systèmes Axiomatiques de la Théorie des Ensembles* (Paris: Gauthier-Villars, 1953).

——— Kreisel; Quine; Rosser も見よ.

Weyl, Hermann, *Das Kontinuum* (Leipzig, 1918).

Whitehead, A. N., "The logic of relations, logical substitution groups, and cardinal numbers," *American Journal of Mathematics 25* (1903), 157–178.

———and B. Russell, *Principia Mathematica* (Cambridge, England: vol. 1, 1910; vol. 2, 1912; vol. 3, 1913; 2 版, 1925–1927; *56 までの紙表紙本: New York: Cambridge University Press, 1961).

Wiener, Norbert, "A simplification of the logic of relations," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 17* (1912–14), 387–390. van Heijenoort に再録.

Zermelo, Ernst, "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann," *Mathematische Annalen 59* (1904), 514–516. 英訳が van Heijenoort に収録.

———"Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre," *Mathematische Annalen 65* (1908), 261–281. 英訳が van Heijenoort に収録.

———"Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète," *Acta Mathematica 32* (1909), 185–193.

———"Ueber Grenzzahlen und Mengenbereiche," *Fundamenta Mathematicae 16* (1930), 29–47.

Zorn, Max, "A remark on method in transfinite algebra," *Bulletin of the American Mathematical Society 41* (1935), 667–670.

訳者あとがき

本書の著者 Willard van Orman Quine は，1908年6月25日，米国オハイオ州の工業都市 Akron に生れた．彼の家は，祖父の代に米国に移住し，彼とおなじくアクロンに生れた父は，重工業で財をなした．彼の母は近郷からこの父に嫁したが，van Orman というのはこの母方の姓で，英国のマン島に発するという．

彼は，生地の公立学校に学んだのち，Oberlin 大学で数学を専攻し，1930年優等で卒業した．その年， Oberlin の Naomi Clayton と結婚するとともに，Harvard の哲学科大学院に入った．ハーヴァードでは，彼自身の言葉によると，「生活費をうるのを急いで」2年で Ph. D. を取った．論文は論理の分野で，指導教授は Whitehead であった．

彼は，幼時から，地図を好み，旅にあこがれた．1932年学位をうると，Scheldon traveling fellowship をえてヨーロッパに赴き，1年のあいだ，ウィーン，プラーグ，ワルソーに学ぶかたわら，27箇国に旅した．プラーグでは，Rudolf Carnap と親しく交わり，その Logische Syntax の原稿を読んでは議論をかわし，その後の意見の相違にかかわらず，哲学上の刺激ではカルナップに負うところもっとも多い，という．ワルソーでは記号論理学上の最新の知識を吸収し，Tarski に負うところ多かった．そして，1933年，ハーヴァードに新設された Society of Fellows のメンバーに選ばれた旨の電文をホワイトヘッドから受けたのは，プラーグにおいてであった．

1936年以来彼はハーヴァードの哲学科に属し，主として，論理学と言語を中心とする哲学の講義を続けている．その間，1948年には哲学の教授となり，現職はハーヴァードの Edgar Pierce Professor of Philosophy である．また，一方では，幼時からの夢を果し，現存する約170の国のうち，81箇国に足跡を印して，若干の満足を覚えている，とは彼自身の言である．

彼の30年以上におよぶハーヴァードでの生活は，さまざまな研究休暇や訪問教授としての外地での講義に彩られている．38—39年には，ポルトガル領 Azores 島で *Mathematical Logic* を執筆し，42年にはブラジルで講義を行ない，これは後に *O Sentido da Nova Lógica* (1944) として出版された．戦時は海軍に従軍，少佐となったが，46年ハーヴァードに帰った．48年，現夫人 Marjorie Boynton と再婚．53—54年には，Eastman Visiting Professor として Oxford に移り，その翌年には Sherman Lecturer としてロ

ンドン大学で講じた．さらに，57年から59年にかけては，Princeton の Institute for Advanced Study, Stanford の Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences に，また，65年は Center for Advanced Study at Wesleyan ですごした．

彼が東京に来たのは，Adelaide 大学の G. D. Young Lecturer としてオーストラリヤに赴いた1959年の夏である．そのとき，彼は東京大学客員教授として一連の講義を東大と私学会館で行なった．東大での講義は，その後 *Word and Object* (1960) として出版されたものの一部であったが，私学会館における数回の集合論に関する講義は，著者も記しているように，本書の一部をなすものであった．

彼はハーヴァードでの A. M., Ph. D. のほかに，Oxford の M. A. をはじめ，Oberlin, Ohio State, Akron, Washington, Chicago の各大学，さらには，フランスの Lille の諸大学から学位をおくられている．また，British Academy, American Academy of Arts and Sciences, Institut International de Philosophie, Academie Internationale de Philosophie des Sciences, Instituto Brasileiro de Filosofia, American Philosophical Society の会員，役員であるとともに，Association for Symbolic Logic, American Philosophical Association の会長をつとめた．彼は，もはや，アメリカ哲学界の最長老格の一人といってよいであろう．著書としては，*A System of Logistic* (1934), *Mathematical Logic* (1940), *Elementary Logic* (1941), *O Sentido da Nova Lógica* (1944), *Methods of Logic* (1950), *From a Logical Point of View* (1953), *Word and Object* (1960), *Set Theory and Its Logic* (1963), *The Ways of Paradox and Other Essays* (1966), *Selected Logic Papers* (1966)〔いずれも初版の年代〕があり，ほかに約100篇の論文〔そのうちで重要なものは上記著書中に再録されている〕，約30篇の書評・翻訳その他がある．

現在出版準備中の *Autobiographical Sketch for Midcentury Authors* に発表されるはずの著者の自伝的スケッチによれば，彼の哲学的読書は15歳の時，ポーのユーレカに始まるという．そして，Otto と James の著書がそれに続いた．哲学と数学と言語の歴史とが早くから彼の関心の対象であったが，オバーリン大学でその存在を知ったラッセルの『数理哲学』によって，彼は数学を専攻することに決意した．その後，ホワイトヘッド-ラッセルの『プリンキピア・マテマティカ』から決定的な影響をうけ，ハーヴァードに入学したのも，当時ホワイトヘッドが教えていたからであった．

いま，本書に関係する範囲で彼の思想的発展をのべるにあたって，この事情はきわめて重要な意味をもっている．彼の論理学と集合論における主要な業績はプリンキピア・マテ

マティカの延長線上にあり，それを洗練し単純化することにあった，といっても過言ではないからである．

プリンキピアの方法の具体的な叙述は，本書の第3部に見られるしするので，ここでは触れない．その基本的な難点は，命題関数という概念の不明確さ——その内包的な定義にかかわらず，理論展開上の実際的な要求は外延的な面に限られていた——，命題関数の形式にあらわれる量化記号の有無にもとづく order の区別と対象領域の階層的構造にもとづく type の区別との関連，さらに，この order の別が要求するいわゆる還元可能公理の妥当性の問題にあった，といってよい．

プリンキピアの方法が，カントール，ラッセルなどのいわゆる論理的逆理とリシャール，グレーリングなどのいわゆる意味論的逆理とを一括して扱う点に order の別が由来することを見ぬいて，order の別のない単純タイプ理論を提唱したのは，英国の数学者ラムゼーであった．この間の経緯も本文中にのべられている．

クワインの出発点はこの単純化されたタイプ理論にあった．たとえ，この単純タイプ理論をとったとしても，この理論には難点がのこる．たとえば，この理論は基本的には集合論であるが，このなかで数学的な体系を構成してゆく場合には，それぞれのタイプにおいて平行的に議論が運ばれても，タイプの区別を無視した統一的な議論を展開できない．その結果は，自然数をとっても，それぞれの数はそれぞれ一定のタイプに属し，われわれが通常用いているようなタイプの別のない数概念を規定することができないことになる．

このような欠陥からして，数学者がより好んだのは，プリンキピアとほぼおなじ頃に発表されたツェルメロの公理的集合論であった．この体系は，当初問題とされた集合の規定条件をスコーレムが論理学的手法を用いて明確にし，また，フレンケルがいわゆる置換公理を加えるにいたって，一応完成された体系として現在用いられている．さらに，フォン・ノイマンがこの拡張版を構成し，ベルナイスとゲーデルがこれを整備するにおよんで，現在集合論といえば，ツェルメロの体系か，フォン・ノイマン-ベルナイスの体系を意味する，といって差し支えないであろう．

クワインがプリンキピアに対して果した役割は，スコーレムとフォン・ノイマンがツェルメロの体系に対して果した役割に似ている．彼の最初の試みである *A System of Logistic* で，彼はプリンキピアにおける命題関数を membership の面から外延的に整理し，さらに，順序対に類似な ordination を用いて関係概念をも外延的にとり扱う方法を講じている．しかし，この段階では，彼はプリンキピアの方法の整備以上には出ず，タイプの

区別もそのまま踏襲されていた.

彼が単なるタイプ理論をこえる新しい着想を提示したのは，*From a Logical Point of View* に再録されている New foundations for mathematical logic (1937) という論文であった. 彼がここで意図したのは，プリンキピアの体系にひそむ階層的構造論といった哲学的前提をその方法から切り離して，タイプの区別を集合の規定条件の判定にのみ利用する，ということであった. したがって，そこでは，各変項がすべて決定的にそれぞれのタイプに属するというのではなく，一定の与えられた論理的表現のうちで，「∊」の左側の変項が右側の変項よりも下のタイプだと番号がうてさえすればよいというのにすぎない. これを明確に表現したのが，彼のいう stratification の条件であった. この着想にもとづいて具体的に細部にわたって展開された体系は，Rosser の *Logic for Mathematicians* (1953) に見られる. かくして，ここではもはやタイプ存在論は姿を消したが，その反面数学的帰納法やカントールの定理に関する新しい困難が登場することになった.

彼が *Mathematical Logic* (1940) でフォン・ノイマン的なアイディアを採用したのも，これらの欠陥を克服しようとしたからである. ここでは，いわば数学的対象としての集合と概念の外延ともいわるべきクラスとの区別を背景として，stratification はクラスから集合をぬき出すための条件を与えるものとなった. これらの点については，より詳しい叙述が本文中に見られる.

一方，これらの方法論上の構想にもとづいて，クワインは哲学的な議論を展開した. その典型は On what there is (1948)〔*From a Logical Point of View* に再録〕という論文に現われた ontological commitment という考えであろう.「あるということは，変項の値である，ということである」と彼はそれを定式化した. 彼はこれによって存在論の問題が片づくと考えたわけではないが，少くとも存在論的議論の言語的な側面を明らかにしうる，と考えた.（ちなみに，本年度のハーヴァードでの最終講義で，彼は自らの立場を外延的プラトニズムと存在論的相対論として要約している.）

本書の重要な特徴点のひとつは，彼のこのような存在論的な配慮にある. 集合論の書物であるにもかかわらず，本書が哲学的色彩を強く感じさせるのも，著者がまず存在論に関与していないクラスの理論，すなわち仮理論という枠を設けたうえで，存在論に関与した実理論を構成するという方法をとっているからである. そこには，彼の年来の主張が背景にある.

クラスの仮理論は，また，その存在論的中立性からして，一種の façon de parler とし

て，異なるさまざまな体系を統一的に叙述する便宜を与えてくれる．本書が単にひとつの集合論というだけでなく，タイプ理論，ツエルメロ，フォン・ノイマン，クワインといった各種の，それも基本的に異なる理論の概観を与えてくれるのは，まさに，その仮理論のおかげである．

存在論に関与した実理論の範囲では，本書の方法は，クワインが以前に提示している New foundations および *Mathematical Logic* といちじるしく異なっている．序文にもあるように，集合論に要求される包括的な公理群を最初から与えるのではなく，当面の課題を処理するのに必要なかぎりで公理が導入され，しかもその公理はできるだけ弱いものに止められている．さらに，選択公理のように強い公理が要求される場合には，公理としてではなく，定理の仮説のひとつとして書きだされるという処置がとられている．この点でも，仮理論が十分利用されている点は注目してよい．

このように，本書は，哲学的な議論と集合論の歴史的な過程に十分な考慮を払ったうえで，各種の集合論を比較・検討してそれらの特徴を明らかにし，しかも，それとともに独自なひとつの集合論を提出するという，きわめてユニークな構想のうえに書かれている．類書の見られない現在，わが国でも多くの読者のえられることを訳者として希望してやまない．

「凡例」および「日本語版序文」にも記されているように，この訳書の成立は，いささか特異な情況にあった．そこで，若干，その経緯についてのべておきたい．それは本書の内容的発展とも密接に関係しているからである．われわれ両人の共同作業として現在刊行されている英語版(1963年版)の翻訳を一応終えた1966年初め，われわれはきたるべき改訂版のタイプ原稿のコピーを受けとった．この原稿が，著者と訳者とがそれを知るのみで，結局，陽の目を見ないことになったいま，その内容について少しのべておきたい．この第一次改訂の趣旨は，Charles Parsons(文献表参照)によって指摘された最大の順序数があるときの超限回帰法に関する初版の難点を処理するという点にあった．そのため，25.1の「SEQ」の定義が本訳書に見られるような「SEQ α」の定義に変更され，それに応じて§25が訂正されるとともに，§26はまったく新しく書き改められていた．その他各所で改訂が加わえられていたが，その多くは本訳書に採用されている．そして，この第一次改訂版の原稿によってわれわれの翻訳が終ったのが66年7月で，訳稿は岩波書店に渡されて，印刷準備に入った．

筆者が著者からより基礎的な第二次改訂の意図を聞かされ，2週間ほど前の日付のつい

た，ペンと鉛筆による走り書のその草稿を手渡されたのは，筆者が渡米した66年9月下旬，ハーヴァードの構内であった．そこで，岩波書店の好意により，訳書の刊行は一応中止され第二次改訂の決定稿を待つこととなった．著者は秋学期の集合論の講義を，本書初版を用いながらそれに改訂を加えつつ行ない，11月末，日本語版序文と改訂版のタイプ原稿とが筆者に渡された．筆者がこの原稿に従って若干の誤まりを訂正しつつ訳了したのが，67年1月末であった．訳稿はただちに藤村の手に送られ，旧稿と新稿とを合せて編集が行われて，6月から再び印刷準備に入ることとなった．第二次改訂の主要な点は，著者が日本語版序文にのべている通りであるからくり返さないが，英語改訂版は出版社の都合でおそらく今年末か来年にならなければ出版されない予定である．したがって，本書は原書のまだ印刷されていない訳書という奇異な運命を負うこととなった．

このような事情と，なにぶんにも訳者両名が遠隔の地にあるというハンディキャップから，われわれとしては全力をつくしたつもりではあるが，思わざる過誤の生ずるおそれなしとしない．読者諸賢の御叱正を期待するとともに，なにぶんの御宥恕を乞いたい．さらに，私事にわたって恐縮であるが，筆者大出は数年来戸籍上の姓が大江と変った．旧姓大出はいわばペン・ネームとしてずっと用いているが，米国滞在中は旅券その他の関係もあり大江の姓を用いざるをえなくなった．本文に大江の名が現われるのはそのためである．

終りに，単に著者と訳者という関係以上に，筆者の米国生活上種々の配慮を頂いたクワイン教授に，また，偶然とはいえ，この翻訳中筆者にハーヴァードでの研究の機会を与えられたHarvard-Yenching研究所に心からの謝意を表したい．さらに，この翻訳のきっかけを与えられた東京大学大森荘蔵，東京工大吉田夏彦，種々の御指導を頂いた慶応大学松本正夫，沢田允茂の諸氏，索引の作製に尽力して下さった高野守正，星野慎吾の両君，また，この訳書刊行の経緯からして一方ならぬ御迷惑をかけた岩波書店編集部の方がた，とくに竹田行之，加藤亮三，中村寛夫の三氏に深く感謝したい．これらの方がたの御協力がなければ本訳書は生れなかったであろう．

1967年6月　　米国，ケンブリッジにて

大　出記

索　　引

索引は人名と事項に分けた．算用数字はページ数を，数字の後のｆは次ページにおよぶことを，ｎはそのページの註に該当語，もしくは該当する内容のあることを示す——訳者．

事　　項

事項は訳語のアイウエオ順に並べてある．小項目の順はいずれもアイウエオ順である．

あ　行

か　行

さ 行

た　行

ま 行

や　行

ら　行

わ 行

人 名

人名は原名，アルファベット順．なお，頻度の高い人名については事項別に分類して頁をあげた．

集合論とその論理

1968年 8月20日 第1刷発行 ©

¥1300

訳 者 大出 晁
藤村 龍雄

発行者 岩 波 雄 二 郎

東京都千代田区神田一ツ橋 2ノ3
発行所 株式会社 岩 波 書 店

落丁・乱丁本はお取替いたします 精興社印刷・宮内製本